Université de Rennes 1
DEUG, 1ère année

MA3-Mathématiques

Examen terminal, le 3 mai 2002, 10h–12h

Documents et calculatrices non autorisés. Justifier toutes les réponses.

Exercice 1. Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le rang de A.
b. En déduire que A est inversible.
c. Calculer A^{-1}.

Exercice 2. Soit $F\colon \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ l'application définie par

$$F(P) = P + P' + P(0) \cdot X + \tfrac{1}{6} P''(0) \cdot X^3,$$

quel que soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

a. Montrer que F est linéaire.

Soit $\mathcal{B}$ la base $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. Déterminer la matrice M de F dans la base $\mathcal{B}$.
c. Quelle est la matrice de $F \circ F$ dans la base $\mathcal{B}$?
d. Déterminer une base du noyau $\ker(F)$ de F.
e. Déterminer une base de l'image $\operatorname{im}(F)$ de F.

Soit $\mathcal{B}'$ la base $(1, X+1, (X+1)^2, (X+1)^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

f. Déterminer la matrice de passage P du changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
g. Déterminer la matrice de passage Q du changement de base de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
h. Déterminer la matrice M' de F dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 3. Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f\colon V \to V$ un endomorphisme de V tel que $f^3 = f$, i.e., $f \circ f \circ f = f$. Montrer que $V = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$.