Université de Rennes 1
DEUG Sciences & Technologie
1ère année

MA3-Mathématiques

Examen Terminal, le 1er juin 1999, 8h–10h

Documents et calculatrices non autorisés. Les trois exercices sont indépendants. Justifier toutes vos réponses. Barème provisoire au verso.

Exercice 1. Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie n et $\mathcal{E} = (u_1, u_2, u_3)$ une famille d'éléments de E. Soit d'autre part F un espace vectoriel réel de base $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$.

a. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur la famille $\mathcal{E}$ pour qu'il existe au moins une application linéaire $\varphi\colon E \to F$ vérifiant

$$\varphi(u_1) = v_1, \quad \varphi(u_2) = v_2 \quad \text{et} \quad \varphi(u_3) = v_3. \tag{*}$$

b. On suppose qu'il existe au moins une application linéaire $\varphi\colon E \to F$ vérifiant (*). Déterminer une inégalité non triviale portant sur $n = \dim(E)$.

On pose dans la suite $E = F = \mathbb{R}^4$. Soient a, b, c, d des réels et soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Soit d'autre part $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

c. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b, c, d pour qu'il existe au moins une application linéaire $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vérifiant (*).

Exercice 2. Soient v_1, v_2, v_3 les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

T.S.V.P.

Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b. Déterminer la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3).

c. En déduire que $f \circ f = f$.

d. Donner une interprétation géométrique de f.

Exercice 3. Rappelons que $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel réel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ et que $\mathbb{R}_2[X]$ est l'espace vectoriel réel de polynômes en X à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré ≤ 2. Soit $T\colon \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[X]$ l'application définie par

$$T(f) = f(0) + f'(0)X + \tfrac{1}{2}f''(0)X^2$$

quelle que soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

a. Montrer que T est linéaire.

b. Montrer que T est surjective.

c. Montrer que T n'est pas injective.

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (\cos, \sin, \cos^2, \sin^2)$. Soit S la restriction de T à E, i.e., S est l'application linéaire de E dans $\mathbb{R}_2[X]$ telle que $S(f) = T(f)$ quelle que soit $f \in E$. Soit $\mathcal{C}$ la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

d. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

e. Déterminer la matrice de S dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

f. Déterminer $\operatorname{rang}(S)$ et $\dim(\ker(S))$.

Barème indicatif:

Exercice 1 : 5 pts	**Exercice 2 : 6 pts**	**Exercice 3 : 9 pts**

T.S.V.P.