Université de Rennes 1
DEUG Sciences & Technologie
1ère année

MA3-Mathématiques

Examen Terminal 2ème session, le 6 septembre 1999, 8h–10h

Documents et calculatrices non autorisés. Les trois exercices sont indépendants. Justifier toutes vos réponses. Barème provisoire au verso.

Exercice 1. Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit d'autre part A la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

On désigne par f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

a. Soit u le vecteur $u = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$. Montrer que $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$.
b. Quel est le rang de f? Quelle est la dimension de $\ker(f)$?
c. Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$ soit $e'_k = e_k - e_n$. Montrer que $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n-1})$ est une base de $\ker(f)$.
d. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ soit A', avec:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & n \end{pmatrix}$$

e. Exprimer $(A')^i$ en fonction de A', pour $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$. En déduire A^i en fonction de A, pour $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$.

Soit r un réel et M la matrice carrée définie par $M = A - rI$ où I désigne la matrice unité de taille n.

f. Exprimer M^2 en fonction de M et I.
g. Montrer que si $r \neq 0$ et $r \neq n$, la matrice M est inversible et donner une expression de son inverse en fonction de I et de M.

T.S.V.P.

Exercice 2. Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimensions finies. Soient v_1, v_2, v_3, v_4 des éléments de F, et e_1, e_2, e_3, e_4 des éléments de E. On suppose que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.

a. Justifier l'existence de réels α_1, α_2 et α_3 tels que:

$$e_4 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3.$$

b. On suppose qu'il existe une application linéaire $f\colon E \to F$ telle que $f(e_1) = v_1$, $f(e_2) = v_2$, $f(e_3) = v_3$ et $f(e_4) = v_4$. Montrer qu'il existe une relation de dépendance linéaire (R) que l'on explicitera entre les vecteurs v_1, v_2, v_3 et v_4.

c. Réciproquement, on suppose la relation (R) vérifiée. Montrer qu'il existe une application linéaire $f : E \to F$ telle que $f(e_1) = v_1$, $f(e_2) = v_2$, $f(e_3) = v_3$ et $f(e_4) = v_4$.

Exercice 3. Rappelons que $C^0(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel réel des fonctions réelles continues. Soit $L\colon C^0(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ l'application définie par

$$(L(f))(x) = (2 + \cos(x) + \sin(x))f(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $f \in C^0(\mathbb{R})$.

a. Montrer que L est linéaire.
b. Montrer que L est surjective.
c. Montrer que L est injective.

Soient s, t, u les fonctions réelles continues définies par

$$s(x) = 1, \quad t(x) = \cos(x) + \sin(x), \quad u(x) = \sin(2x)$$

pour tout x réel et soient $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ les familles données par $\mathcal{B} = (s, t)$ et $\mathcal{C} = (s, t, u)$. Soient $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$ et $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{C})$.

d. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.
e. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de F.
f. Montrer que $L(E) \subseteq F$.

On notera L' l'application linéaire de E dans F définie par $L'(f) = L(f)$ quelle que soit $f \in E$.

g. Déterminer la matrice $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(L')$ de L' dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
h. Déterminer $\mathrm{rang}(L')$ et $\dim(\ker(L'))$.
i. L'application L' est-elle surjective? Est-elle injective?

Barème indicatif:

Exercice 1 : 7 pts	Exercice 2 : 4 pts	Exercice 3 : 9 pts

T.S.V.P.