

Université de Bretagne Occidentale  
Département de Mathématiques  
DEUG MASS-MIAS 1ère année

ALGEBRE

Examen terminal, 6 janvier 2004, 10h15–12h15

Documents et calculatrices sont interdits.

**Question de cours.** a. Donner la définition d'un nombre premier.

b. Démontrer qu'il y a une infinité de nombres premiers. (On pourra utiliser, sans le démontrer, que tout entier  $\geq 2$  est divisible par un nombre premier.)

**Exercice 1.** a. Déterminer les racines carrées de  $-3 - 4i$ .

b. Déterminer tous les nombres complexes  $z$  qui satisfont

$$z^2 - 3z + 3 + i = 0.$$

**Exercice 2.** a. Soit  $n$  un entier relatif. Montrer que le reste de la division euclidienne de  $n^2$  par 4 est égal à 0 ou 1.

b. Montrer que 2003 n'est pas le carré d'un entier relatif.

c. Est-ce que 2004 est le carré d'un entier relatif? Justifier la réponse.

**Exercice 3.** Déterminer des polynômes réels  $U(X)$  et  $V(X)$  tels que

$$(X^4 + 1)U(X) + (X^2 + X)V(X) = 1.$$

**Exercice 4.** Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{4X^2 + X - 2}{X^3 - X}.$$