Université de Bretagne Occidentale
Département de Mathématiques
DEUG STPI 1ère année

MATHEMATIQUES

Examen terminal, 5 janvier 2004, 9h30–11h00

CORRIGE et BAREME

Exercice 1. (total : 5 pts) Décomposer le dénominateur en facteurs irréductibles

$$x^4 - x^3 = x^3(x-1) \qquad \textbf{(1 pt)}.$$

Effectuer la division de $4x^3 - 2x^2 - x + 2$ par $x - 1$ suivant les puissances croissantes donne

$$4x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x^2 - x - 2) + 3x^3 \qquad \textbf{(2 pts)}.$$

D'où la décomposition en éléments simples

$$\frac{4x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^4 - x^3} = \frac{(x-1)(x^2 - x - 2) + 3x^3}{x^3(x-1)} =$$
$$= \frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{-2}{x^3} + \frac{3}{x-1} \qquad \textbf{(2 pts)}.$$

Exercice 2. (total : 7 pts)

a. La dérivée de f est

$$f'(x) = 5\sin^4(x)\cos(x) + 3\cos(x) = \cos(x)(5\sin^4(x) + 3) \qquad \textbf{(1 pt)}.$$

Comme $f'(0) = 3 \geq 0$, on cherche le plus grand intervalle I contenant 0 sur lequel f' est positif. Comme $5\sin^4(x) + 3 > 0$ quel que soit x, $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $\cos(x) \geq 0$. Par conséquent $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ **(1 pt)**.

b. On a $f(-\frac{\pi}{2}) = -4$ et $f(\frac{\pi}{2}) = 4$. Comme f est croissante sur I,

$$J = f(I) = \left[f\left(-\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-4, 4] \qquad \textbf{(1 pt)}.$$

c. Comme f est strictement croissante sur l'intervalle ouvert $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, f est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $]-4, 4[$. Il s'ensuit que f est une bijection de I sur J **(1 pt)**.

d.
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 + 3\frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{4}+3\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{13}{4\sqrt{2}} \qquad \textbf{(1 pt)}.$$

e. Comme $f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(5\frac{1}{4}+3) = \frac{17}{4\sqrt{2}}$ **(1 pt)**,
$$g'\left(\frac{13}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{4\sqrt{2}}{17} \qquad \textbf{(1 pt)}.$$

Exercice 3. (total : 8 pts)

a. D'après le cours, le développement limité de $\sin(x)$ en $x=0$ à l'ordre 5 est
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \qquad \textbf{(1 pt)}.$$

b. Le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ en $x=0$ à l'ordre 2 est
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2).$$
Donc, le développement limité de $\frac{1}{1+x^2}$ en $x=0$ à l'ordre 4 est
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4).$$
D'où le développement limité de $\arctan(x)$ en $x=0$ à l'ordre 5
$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \qquad \textbf{(2 pts)}.$$

c. En utilisant le a et b,
$$f(x) = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)}.$$
En simplifiant par x,
$$f(x) = \frac{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)}.$$
La division de $1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}$ par $1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}$ selon les puissances croissantes donne
$$1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} = \left(\frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5}\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} - \frac{49x^4}{360}\right) + x^5R(x),$$

pour un certain polynôme $R(x)$. Par conséquent, le développement limité de $f(x)$ en $x = 0$ à l'ordre 4 est

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{49x^4}{360} + o(x^4) \qquad \textbf{(3 pts)}.$$

d. D'abord réécrire l'expression dont on veut prendre la limite :

$$\frac{\sin(x) - \arctan(x) - \frac{1}{6}x^2 \arctan(x)}{x^4 \arctan(x)} = \frac{f(x) - 1 - \frac{1}{6}x^2}{x^4}.$$

D'après le c,

$$\frac{f(x) - 1 - \frac{1}{6}x^2}{x^4} = -\frac{49}{360} + o(1).$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \arctan(x) + \frac{1}{6}x^2 \arctan(x)}{x^4 \arctan(x)} = -\frac{49}{360} \qquad \textbf{(2 pts)}.$$