

MATHEMATIQUES APPLIQUES

Examen terminal, 15 juin 2004, 14h00–16h00

Documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 4y = 0$.

Exercice 2. Soit ch la fonction réelle définie par

$$\text{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

a. Déterminer le développement limité de ch en $x = 0$ à l'ordre 5.

b. Déterminer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\text{ch}(x) - 2 - x^2}{x^4}.$$

Exercice 3. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 4. La mesure de deux paramètres X et Y lors d'une expérience physique donne les résultats suivants pour 8 échantillons distincts :

x	26	27	30	38	45	47	51	56
y	45	52	52	54	65	68	71	73

Résultats partiels :

$$\sum_{i=1}^8 x_i = 320, \quad \sum_{i=1}^8 x_i^2 = 13720, \quad \sum_{i=1}^8 y_i = 480, \quad \sum_{i=1}^8 y_i^2 = 3696, \quad \sum_{i=1}^8 x_i y_i = 20016.$$

a. Représenter ces données. (L'axe des abscisses comporte les abscisses de 15 à 65, l'axe des ordonnées comporte les ordonnées de 35 à 85.)

b. Calculer (on donnera les valeurs exactes)

- la moyenne \bar{X} de X et la moyenne \bar{Y} de Y ,
- la variance σ_X^2 de X et la variance σ_Y^2 de Y ,

T. S. V. P.

- (iii) la covariance $\text{cov}(X, Y)$ de (X, Y) .
- c. En déduire l'équation de la droite des moindres carrés de Y en fonction de X (les coefficients pourront être donnés sous forme de fraction). Représenter la droite sur le graphique de la question a. (On pourra utiliser des points particuliers de la droite comme par exemple le centre de gravité et le point d'abscisse 17 ou 63.)