Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS A

ALGEBRE ET ANALYSE

Contrôle continu, le 22 septembre 2004, 9h40-10h00
CORRIGE et BAREME

Question de cours. Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

*Démonstration par l'absurde **(1 pt)**.* Supposons que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. Alors, il existe des entiers relatifs a et b, avec $b \neq 0$ et $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$, tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ **(1 pt)**. (Il ne faut pas oublier la condition que a et b soient entiers, sinon, on pourrait prendre $a = \sqrt{2}$ et $b = 1$ et le reste de l'argument n'a aucun sens.) On a donc $a^2 = 2b^2$. En particulier a^2 est pair. Comme le carré d'un entier impair est impair, a est pair **(1 pt)**. Cela veut dire qu'il existe un entier relatif c tel que $a = 2c$. D'où $2b^2 = (2c)^2 = 4c^2$ et $b^2 = 2c^2$. Donc b^2 est pair et b aussi **(1 pt)**. Par conséquent, 2 divise a et b donc $\operatorname{pgcd}(a, b) \geq 2$ **(1 pt)**. (On ne peut pas conclure de ce qui précède que $\operatorname{pgcd}(a, b) = 2$.) On arrive à une contradiction, donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

$\square$