Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS A

ALGEBRE ET ANALYSE

Examen terminal, le 6 janvier 2005, 9h00-12h00

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Enoncer et démontrer le Lemme de Gauss pour les entiers relatifs.

Exercice 1. Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et soit $f\colon E \to E$ l'application définie par $f(1) = 3$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2$ et $f(4) = 1$. Soit A le sous-ensemble $\{3, 4\}$ de E.

a. Déterminer le sous-ensemble $f(A)$ de E.
b. Déterminer le sous-ensemble $(f \circ f)(A)$ de E.
c. Déterminer le sous-ensemble $f^{-1}(A)$ de E.
d. Déterminer le sous-ensemble $(f \circ f)^{-1}(A)$ de E.

Exercice 2. a. Déterminer $d = \mathrm{pgcd}(378, 315, 210)$.
b. Déterminer des entiers relatifs a, b, c tels que $378a + 315b + 210c = d$.

Exercice 3. Soient P et Q les polynômes réels définis par

$$\begin{aligned} P =& X^{13} + X^6 + 4X^5 - 8X^3 + 3X + 11 \\ Q =& X^8 - 3X^3 + X + 4. \end{aligned}$$

Déterminer des polynômes réels U et V tels que

$$UP + VQ = X^2 + X + 1.$$

Exercice 4. Décomposer, sur $\mathbb{R}$, en éléments simples la fraction rationnelle réelle

$$\frac{2X^5 - 2X^4 + X^3 + 2X^2 + 5}{X^6 + X^4}.$$

Exercice 5. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$a_n = \frac{n^2 \cos(\frac{n\pi}{2}) + 2n - 1}{2n^2 \sin(\frac{n\pi}{4}) + 3}.$$

a. Montrer que la suite $(a_n)_n$ n'est pas bornée.
b. Montrer que la suite $(a_n)_n$ admet une suite extraite convergente.
c. Montrer que la suite $(a_n)_n$ admet une suite extraite bornée qui ne converge pas.