

Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS A

ALGÈBRE ET ANALYSE

Examen terminal, le 14 juin 2005, 9h00-12h00

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Énoncer et démontrer le Lemme de Gauss pour les entiers relatifs.

Exercice 1. Soient $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ des applications d'ensembles. Supposons que f est injective et que g est surjective. Est-ce que $g \circ f$ est surjective? Si oui, donner une démonstration. Sinon, donner un contre-exemple explicite.

Exercice 2. Soit R la relation sur \mathbb{R} définie par xRy si et seulement si $|x - y| \leq 2$.

- a. La relation R est-elle réflexive?
- b. La relation R est-elle symétrique?
- c. La relation R est-elle transitive?

Pour chaque question, donner une démonstration au cas d'une réponse positive, et un contre-exemple explicite au cas d'une réponse négative.

Exercice 3. a. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-8 + 6i$.

b. Déterminer les solutions de l'équation $z^2 + (-3 + 3i)z + (2 - 6i) = 0$.

Exercice 4. Déterminer $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $7534 \times u + 4357 \times v = 1$.

Exercice 5. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle réelle

$$\frac{1}{(X - 1)^2(X^2 - 1)}$$

Exercice 6. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite minorée mais non bornée. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle croissante? Si oui, donner une démonstration. Sinon, donner un contre-exemple.