Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE 1 ENTREE A IMP

ALGEBRE ET ANALYSE

Partiel mi-semestre de rattrapage
le 5 décembre 2006
CORRIGE et BAREME

Question de cours. Par l'absurde **(1 pt)**. Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, avec $b \neq 0$ et $\operatorname{pgcd}(a,b) = 1$, tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. En prenant le carré de deux cotés, on a $\frac{a^2}{b^2} = 2$ et $a^2 = 2b^2$. En particulier, 2 divise a^2. Comme 2 est premier, 2 divise a **(1 pt)**. On peut donc écrire $a = 2c$ avec $c \in \mathbb{Z}$. Comme $a^2 = 2b^2$, on a, après substitution, $(2c)^2 = 2b^2$, i.e., $2c^2 = b^2$. En particulier, 2 divise b^2. Comme 2 est premier, 2 divise b **(1 pt)**. On a donc 2 divise a et 2 divise b ce qui contredit le fait que $\operatorname{pgcd}(a,b) = 1$. Par conséquent $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel **(1 pt)**.

Exercice 1. Pour $n = 0$, on a bien

$$F_{n+1} = F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5 = 2 + 3 = 2 + 2^{2^0} = 2 + F_0 = 2 + F_0 \cdots F_n.$$

L'assertion est donc bien vraie au rang 0 **(2 pt)**.

Supposons que l'assertion est vraie au rang n, pour un certain entier naturel n **(1 pt)**, i.e., on suppose que $F_{n+1} = 2 + F_0 \cdots F_n$, ou de manière équivalente, que $F_{n+1} - 2 = F_0 \cdots F_n$. On montre l'assertion au rang $n+1$:

$$\begin{aligned} F_{(n+1)+1} = F_{n+2} = 2^{2^{n+2}} + 1 = 2^{2^{n+1}.2} + 1 = (2^{2^{n+1}})^2 + 1 = \\ = (F_{n+1} - 1)^2 + 1 = F_{n+1}^2 - 2F_{n+1} + 2 = 2 + (F_{n+1} - 2)F_{n+1} = \\ 2 + F_0 F_1 \cdots F_n F_{n+1} \quad \textbf{(2 pt)}. \end{aligned}$$

Par le principe de récurrence,

$$F_{n+1} = 2 + F_0 F_1 \cdots F_n$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}$ **(1 pt)**.

Exercice 2. a. Le discriminant Δ de l'équation est

$$\Delta = (3 - 2i)^2 - 4(8 + 6i) = -27 - 36i = -9(3 + 4i) \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Une racine carrée de -9 est $3i$ **(1 pt)**, une racine carrée de $3+4i$ est $2+i$ **(2 pt)**. Du coup, une racine carrée de Δ est $3i(2+i) = -3+6i$ **(1 pt)**. Les solutions de l'équation sont donc

$$z = \frac{-(3-2i) \pm (-3+6i)}{2} = -3+4i, -2i \quad \textbf{(1 pt)}.$$

b. Soit $w \in \mathbb{C}$ et $z = w^2$. Le nombre complex w est solution de l'équation $w^4 + (3-2i)w^2 + 8 + 6i = 0$ si et seulement si z est solution de l'équation $z^2 + (3-2i)z + 8 + 6i = 0$ **(1 pt)**. Comme les solutions de cette dernière équation sont $-3+4i$ et $-2i$, les solutions de la première équation sont les racines carrées de $-3+4i$ et $-2i$. Or, les racines carrées de $-3+4i$ sont $\pm(1+2i)$ **(1 pt)**, et les racines carrées de $-2i$ sont $\pm(1-i)$ **(1 pt)**. Du coup, les solutions de l'équation $w^4 + (3-2i)w^2 + 8 + 6i = 0$ sont

$$1+2i,\ -1-2i,\ 1-i,\ -1+i \quad \textbf{(1 pt)}.$$