Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS A IMP

ALGEBRE ET ANALYSE

Examen terminal, le 9 janvier 2007, 9h00-12h00

CORRIGE ET BAREME

Exercice 1. On effectue l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 2007 &= 1 \times 1814 + 193 \\ 1814 &= 9 \times 193 + 77 \\ 193 &= 2 \times 77 + 39 \\ 77 &= 1 \times 39 + 38 \\ 39 &= 1 \times 38 + 1 \\ 38 &= 38 \times 1 + 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathrm{pgcd}(2007, 1814) = 1$ **(1 pt)**.

Exercice 2. D'après le cours, les diviseurs positifs de p^2q^2 sont

$$p^0q^0, p^0q^1, p^0q^2, p^1q^0, p^1q^1, p^1q^2, p^2q^0, p^2q^1, p^2q^2 \quad \textbf{(1 pt)}.$$

D'où

$$\begin{aligned} s = p^0q^0 + p^0q^1 + p^0q^2 + p^1q^0 + p^1q^1 + p^1q^2 + p^2q^0 + p^2q^1 + p^2q^2 = \\ = p^0(q^0 + q^1 + q^2) + p^1(q^0 + q^1 + q^2) + p^2(q^0 + q^1 + q^2) = \\ = (p^0 + p^1 + p^2)(q^0 + q^1 + q^2) = (1 + p + p^2)(1 + q + q^2). \end{aligned}$$

Comme $1 + p + p^2 \neq 1$ et $1 + q + q^2 \neq 1$, l'entier naturel s n'est pas premier **(2 pt)**.

Exercice 3. a. D'après le cours, si le nombre rationnel $\frac{r}{s}$ es racine de P, alors r divise -4 et s divise 3 **(1 pt)**. Du coup, l'ensemble des racines de P dans $\mathbb{Q}$ est un sous-enesmble de

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}\}.$$

Il est clair que $P(1) \neq 0$, $P(-1) \neq 0$ et $P(2) \neq 0$. Par contre,

$$\begin{aligned} P(-2) = -3 \times 2^5 + 5 \times 2^4 + 2 \times 2^3 + 6 \times 2^2 - 10 \times 2 - 4 = \\ = (-3 \times 2 + 5)2^4 + (2 \times 2 + 6)2^2 - 24 = -16 + 40 - 24 = 0. \end{aligned}$$

Donc -2 est bien une racine de P dans $\mathbb{Q}$.

On divise P par $X+2$ et on obtient $P=(X+2)Q$ où $Q=3X^4-X^3+6X-2$. Par le même argument que ci-dessus, l'ensemble des racines de Q est un sous-ensemble de

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}\}.$$

Comme ± 1 et 2 ne sont pas racine de P, ils ne sont pas non plus racine de Q. Il est clair que $Q(-2)\neq 0$. Par contre

$$Q(\frac{1}{3})=3(\frac{1}{3})^4-(\frac{1}{3})^3+6\frac{1}{3}-2=0.$$

Donc, $\frac{1}{3}$ est bien racine de Q, et donc aussi de P.

On divise Q par $3X-1$ et on obtient $Q=(3X-1)R$, où $R=X^3+2$. L'ensemble des racines de R dans $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble de $\{\pm 1, \pm 2\}$. Mais on a vu que ces derniers éléments ne sont pas racine de Q, donc ils ne sont pas non plus racine de R. Autrement dit, R n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$. Il s'ensuit que les racines de P dans $\mathbb{Q}$ sont $-2, \frac{1}{3}$ **(2 pt)**.

b. Comme $-\sqrt[3]{2}$ est racine de X^3+2 dans $\mathbb{R}$, on peut diviser X^3+2 par $X+\sqrt[3]{2}$ et on obtient

$$X^3+2=(X+\sqrt[3]{2})(X^2-\sqrt[3]{2}X+\sqrt[3]{4}).$$

Du coup,

$$P=(X+2)(3X-1)(X^3+2)=(X-2)(3X-1)(X+\sqrt[3]{2})(X^2-\sqrt[3]{2}X+\sqrt[3]{4}).$$

Comme ce dernier facteur est de degré 2 et de discriminant strictement négatif, les racines de P dans $\mathbb{R}$ sont $-2, \frac{1}{3}, \sqrt[3]{2}$ **(1 pt)**.

c. Une racine de X^3+2 dans $\mathbb{C}$ est $-\sqrt[3]{2}$. D'après le cours, les racines de X^3+2 dans $\mathbb{C}$ sont donc

$$-\sqrt[3]{2},\ -\sqrt[3]{2}(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\sqrt{3}),\ -\sqrt[3]{2}(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i\sqrt{3}).$$

Du coup, les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont

$$-2,\ \frac{1}{3},\ -\sqrt[3]{2},\ -\sqrt[3]{2}(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\sqrt{3}),\ -\sqrt[3]{2}(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i\sqrt{3}) \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Exercice 4. a. On effectue l'algorithme d'Euclide étendu. Posons $R_{-1}=A$, $R_0=B$, $U_{-1}=1$, $V_{-1}=0$, $U_0=0$ et $V_0=1$. Soient Q_1 et R_1 le quotient et le reste, respectivement, dans la division euclidienne de R_{-1} par R_0. On a

$$Q_1=X \quad \text{et} \quad R_1=X^3-2X.$$

Posons $U_1 = U_{-1} - Q_1 U_0$ et $V_1 = V_{-1} - Q_1 V_0$. On a

$$U_1 = 1 \quad \text{et} \quad V_1 = -X$$

Soient Q_2 et R_2 le quotient et le reste, respectivement, dans la division euclidienne de R_0 par R_1. On a

$$Q_2 = 2X \quad \text{et} \quad R_2 = X^2 - 2.$$

Posons $U_2 = U_0 - Q_2 U_1$ et $V_2 = V_0 - Q_2 V_1$. On a

$$U_2 = -2X \quad \text{et} \quad V_2 = 1 + 2X^2$$

Comme $R_2 = X^2 - 2$ divise $R_1 = X^3 - 2X$, le reste dans la division euclidienne de R_1 par R_2 est égal à 0. Il s'ensuit que $D = R_2 = X^2 - 2$ **(1 pt)**. Soient $U = U_2$ et $V = V_2$. On a bien $UA + VB = X^2 - 2$ **(1 pt)**.

b. Les racines communes de A et B sont les racines de D. En effet, si x est racine de A et B, x est racine de $UA + VB = D$ **(0,5 pt)**. Réciproquement, si x est racine de D, x est racine commune de A et B puisque D divise A et B **(0,5 pt)**. Les racines communes de A et B sont donc les racines de D. Comme $D = X^2 - 2$, les racines communes de A et B sont $\pm\sqrt{2}$ **(1 pt)**.

Exercice 5. a. On calcule

$$\begin{aligned} P = (X^2 + (i-1)X + 7i + 4)(X + 2i + 1)(X - 3i - 2) = \\ = (X^3 + 3iX^2 + (6i+1)X + 15i - 10)(X - 3i - 2) = \\ = X^4 - 2X^3 + 10X^2 + 6X + 65. \end{aligned}$$

Donc on a bien $P \in \mathbb{R}[X]$ **(1 pt)**.

b. D'après le a, P est un polynôme réel de degré 4. D'après le cours, P est réductible dans $\mathbb{R}[X]$ **(1 pt)**. Cherchons à écrire P comme produit de deux polynômes réels non constants.

Comme $P \in \mathbb{R}[X]$ et $P(-2i - 1) = 0$, on a aussi

$$0 = \overline{P(-2i-1)} = P(\overline{-2i-1}) = P(2i - 1).$$

De même, $P(-3i + 2) = 0$. Du coup, P est un polynôme complexe de coefficient dominant 1 et de degré 4 qui s'annule en

$$2i - 1, \ -2i - 1, \ 3i + 2, \ -3i + 2.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} P = (X - 2i + 1)(X + 2i + 1)(X - 3i - 2)(X + 3i - 2) = \\ = (X^2 + 2X + 5)(X^2 - 4X + 13) \quad \textbf{(1 pt)}, \end{aligned}$$

en regroupant deux-à-deux les facteurs complexes conjugués.

Exercice 6. Effectuons la division de 1 par $(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$ suivant les puissances croissantes, à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned}
&1 = (-1)(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) + X^3 - 3X^2 + 3X = \\
&1 = (-1 - 3X)(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) + 3X^4 - 8X^3 + 6X^2 = \\
&1 = (-1 - 3X - 6X^2)(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) + 6X^5 - 15X^4 + 10X^3 = \\
&1 = (-1 - 3X - 6X^2)(X-1)^3 + X^3(6X^2 - 15X + 10) \quad \textbf{(1 pt)}
\end{aligned}$$

Du coup,

$$F = \frac{1}{X^3(X-1)^3} = \frac{(-1 - 3X - 6X^2)(X-1)^3 + X^3(6X^2 - 15X + 10)}{X^3(X-1)^3} = \frac{-1}{X^3} + \frac{-3}{X^2} + \frac{-6}{X} + \frac{6X^2 - 15X + 10}{(X-1)^3} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Ecrire le polynôme $6X^2 - 15X + 10$ comme polynôme en $X - 1$:

$$\begin{aligned}
6X^2 - 15X + 10 &= 6((X-1)+1)^2 - 15((X-1)+1) + 10 = \\
&= 6(X-1)^2 + 12(X-1) + 6 - 15(X-1) - 15 + 10 = \\
&= 6(X-1)^2 - 3(X-1) + 1 \quad \textbf{(1 pt)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{6X^2 - 15X + 10}{(X-1)^3} = \frac{6(X-1)^2 - 3(X-1) + 1}{(X-1)^3} = \frac{6}{X-1} + \frac{-3}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X-1)^3},$$

et la décomposition en éléments simples de F est

$$\frac{-1}{X^3} + \frac{-3}{X^2} + \frac{-6}{X} + \frac{6}{X-1} + \frac{-3}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X-1)^3} \quad \textbf{(1 pt)}.$$