Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS A IMP

ALGEBRE ET ANALYSE

Examen terminal 2nd session, le 11 juin 2008

CORRIGE ET BAREME

Question de cours. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. De toute famille d'intervalles ouverts qui recouvre l'interval $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, on peut extraire une sous-famille finie qui recouvre $[a, b]$. **(2 pts)**

Exercice 1. a. Soit $x, y, z \in E$. Comme $[\sqrt{x}] = \sqrt{x}]$, La relation R est réflexive. Si $[\sqrt{x}] = [\sqrt{y}]$, alors on a aussi $[\sqrt{y}] = [\sqrt{x}]$. La relation R est donc symétrique. Supposons que $[\sqrt{x}] = [\sqrt{y}]$ et que $[\sqrt{y}] = [\sqrt{z}]$. Dans ce cas $[\sqrt{x}] = [\sqrt{z}]$. La relation R est donc transitive. Il s'ensuit que R est une relation d'équivalence. **(1 pt)**

b. La classe d'équivalence de 0 est $\overline{0} = \{0\}$ car 0 est le seul élément.de E dont la partie entière de la racine carrée vaut 0. La classe d'équivalence de 1 est $\overline{1} = \{1, 2, 3\}$, car $[\sqrt{2}] = 1$ et $[\sqrt{3}] = 1$, et ce sont les seuls éléments de E avec cette propriété. de même, $\overline{4} = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ et $\overline{9} = \{9, 10\}$. **(2 pt)**.

c. D'après le b, il y a exactement 4 classes d'équivalence. Comme E/R est l'ensemble des classes d'équivalence de E, le cardinal de E/R est égal à 4. **(1 pt)**

Exercice 2. Le discriminant est $\Delta = (3 + 2i)^2 - 4(5 + i) = -15 + 8i$. Déterminons une racine carrée δ de δ. On a $|\Delta| = \sqrt{225 + 64} = 17$. Du coup, une racine carrée de Δ est

$$\delta = \sqrt{\tfrac{1}{2}(-15 + 17)} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}(15 + 17)} = 1 + 4i. \quad \textbf{(1 pt)}$$

Par conséquent, les solutions de l'équation sont

$$\frac{(3 + 2i) + (1 + 4i)}{2} = 2 + 3i \quad \text{et} \quad \frac{(3 + 2i) - (1 + 4i)}{2} = 1 - i. \quad \textbf{(1 pt)}$$

Exercice 3. Faux. Contre-exemple, soient $P = Q = 2$. Comme polynôme constants non nuls, P et Q sont premiers entre eux, mais les entiers $P(0) = 2$ et $Q(0) = 2$ ne le sont pas. **(2 pt)**

Exercice 4. a. $d = 1$. **(1 pt)** b. $u = 740$ et $v = -831$ conviennent, par exemple. **(1 pt)**

Exercice 5.

$$F = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}. \quad \textbf{(4 pt)}$$