Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS 1

ALGEBRE ET GEOMETRIE

Contrôle continu, le 11 décembre 2013, 10h15-10h45
CORRIGE et BAREME

Question de cours. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a \neq 0$. Il existe $q, r \in \mathbb{Z}$ tels que $b = qa + r$, où $0 \leq r < |a|$ **(1 pts)**. De plus, q et r sont uniquement déterminés par ces conditions **(1 pt)**.

Exercice 1. a. **(2 pts)** Le quotient de x dans la division euclidienne de x par 3 est égal à lui-même. On a donc bien xRx pour tout $x \in E$. La relation R est bien réflexive.

Supposons que xRy. Cela veut dire que le quotient dans la division euclidienne de x par 3 est égal au quotient dans la division euclidienne de y par 3. Ce dernier quotient est donc aussi égal au premier. Il s'ensuit que yRx, et la relation R est symétrique.

Supposons que xRy et yRz. Cela veut dire que le quotient dans la division euclidienne de x par 3 est égal au quotient dans la division euclidienne de y par 3, et que le quotient dans la division euclidienne de y par 3 est égal au quotient dans la division euclidienne de z par 3. Il s'ensuit que le quotient dans la division euclidienne de x par 3 est égal au quotient dans la division euclidienne de z par 3. On a donc xRz, et la relation R est transitive.

Par conséquent, la relation R est une relation d'équivalence.

b. **(2 pts)** Les divisions euclidiennes de 0, 1 et 2 par 3 sont $0 = 0 \times 3 + 0$, $1 = 0 \times 3 + 1$, et $2 = 0 \times 3 + 2$. Ils ont tous les trois 0 comme quotient. Les autres éléments de E ont un quotient non nul dans la division euclidienne par 3. Il s'ensuit que le sous-ensemble $\{0, 1, 2\}$ de E est une classe d'équivalence.

De même, les éléments 3, 4 et 5 de E ont un quotient égal à 1 dans la division euclidienne par 3, et ce sont les seuls ayant ce quotient. Il s'ensuit que le sous-ensemble $\{3, 4, 5\}$ est une classe d'équivalence.

De même, les sous-ensembles $\{6, 7, 8\}$ et $\{9, 10\}$ sont des classes d'equivalence.

En tout il y a 4 classes d'équivalence : $\{0, 1, 2\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{6, 7, 8\}$ et $\{9, 10\}$.

Exercice 2. Faisons l'algorithme d'Euclide étendu :

i	r_{i-2}	r_{i-1}	q_i	r_i	u_i	v_i
-1					1	0
0					0	1
1	210	87	2	36	1	-2
2	87	36	2	15	-2	5
3	36	15	2	6	5	-12
4	15	6	2	3	-12	29
5	6	3	2	0		

On en déduit que $\mathrm{pgcd}(210, 87) = 3$ **(2 pts)** et que

$$-12 \times 210 + 29 \times 87 = 3 \quad \textbf{(2 pts)}.$$