Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS 1

ALGEBRE ET GEOMETRIE

Examen terminal, le 9 janvier 2014, 13h30-16h30

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Enoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 1. Soit $f\colon E \to E$ une application ensembliste d'un ensemble E dans lui-même.

a. Si $f \circ f = \mathrm{id}_E$, a-t-on $f = \mathrm{id}_E$? Si oui, le démontrer. Sinon, donner un contre-exemple.

b. Si $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_E$, a-t-on $f = \mathrm{id}_E$? Si oui, le démontrer. Sinon, donner un contre-exemple.

c. Si $f \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_E$, a-t-on $f = \mathrm{id}_E$? Si oui, le démontrer. Sinon, donner un contre-exemple.

d. Montrer que f est injective si $f \circ f$ l'est.

e. Montrer que f est surjective si $f \circ f$ l'est.

f. Montrer que f est bijective si $f \circ f$ l'est.

Exercice 2. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit une relation R sur $\mathcal{F}$ par

$$f\,R\,g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\colon f(x) \leq g(x).$$

a. Montrer que la relation R est une relation d'ordre partiel sur $\mathcal{F}$.

b. La relation R est-elle un ordre total ? Si oui, le démontrer. Sinon, dire pourquoi elle ne l'est pas.

Exercice 3. a. Soit a un entier relatif dont le reste dans la division euclidienne par 61 est égal à 1. Montrer par récurrence que le reste dans la division euclidienne de a^n par 61 est égal à 1 pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

b. Quel est le reste dans la division euclidienne de 2014^{2014} par 61 ? Justifier la réponse.

Exercice 4. Soient a et b des entiers relatifs.

a. Soit d un diviseur commun de a et b. Montrer que d est un diviseur commun des entiers relatifs $2a + 5b$ et $a + 3b$.

b. Soit d un diviseur commun des entiers relatifs $2a+5b$ et $a+3b$. Montrer que d est un diviseur commun de a et b.

c. En déduire que $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(2a + 5b, a + 3b)$.

Exercice 5. Soient A, B des polyômes dans $\mathbb{R}[X]$ définis par

$$A = 2X^5 - 10X^4 + 21X^3 - 24X^2 + 12X$$

et

$$B = X^4 - 4X^3 + 7X^2 - 7X + 2.$$

a. Déterminer D, pgcd de A et B.

b. Déterminer $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $UA + VB = D$.

c. Montrer que A et B ont au moins une racine dans $\mathbb{R}$ en commun.

d. Montrer que A et B ont au plus une racine dans $\mathbb{R}$ en commun.

Exercice 6. Soit A le polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ défini par

$$A = X^4 + 6\,X^2 + 25.$$

a. Montrer que A n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

b. Sans déterminer les racines de A dans $\mathbb{C}$, peut-on dire d'avance combien il y en a ? Expliquer pourquoi.

c. Déterminer les racines de A dans $\mathbb{C}$.

d. Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles de A dans $\mathbb{C}[X]$.

e. Le polynôme A est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Si oui, pourquoi. Sinon, donner sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Barème indicatif sur 20 points :

Q de cours	2 pt
Exercice 1	3 pt
Exercice 2	1 pt
Exercice 3	2 pt
Exercice 4	2 pt
Exercice 5	5 pt
Exercice 6	5 pt

T. S. V. P.