Université de Bretagne Occidentale

UFR Sciences et Techniques

LICENCE PARCOURS 1

ALGEBRE ET GEOMETRIE

Partiel mi-semestre, le 25 octobre 2014, 9h00-10h00

CORRIGE et BAREME

Exercice 1. a. Le module de z est

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}. \quad \textbf{(1 pt)}$$

Son argument principal est $-\frac{5}{6}\pi$ car

$$\frac{z}{|z|} = \frac{-3-i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}i = \cos(-\tfrac{5}{6}\pi) + i\sin(-\tfrac{5}{6}\pi). \quad \textbf{(1 pt)}$$

b. D'après le a,

$$z = 2\sqrt{3}e^{-\frac{5}{6}i\pi}. \quad \textbf{(1 pt)}$$

c. D'après le b,

$$z^{18} = (2\sqrt{3}e^{-\frac{5}{6}i\pi})^{18} = 2^{18}3^9e^{-15i\pi}.$$

Or, $-15i\pi = -8 \times 2i\pi + i\pi$. D'où

$$z^{18} = 2^{18}3^9e^{-8\times 2i\pi + i\pi} = 2^{18}3^9(e^{2i\pi})^{-8}e^{i\pi} =$$
$$2^{18}3^9(1)^{-8}(-1) = -2^{18}3^9. \quad \textbf{(1 pt)}$$

Exercice 2. a. D'après le cours, on a

$$\xi_k = e^{\frac{2ki\pi}{5}},$$

pour $k = 0, \ldots, 4$. **(2 pt)**

b. On calcule

$$\xi(\xi_0 + \cdots + \xi_4) = e^{\frac{2i\pi}{5}}(e^{\frac{0\times i\pi}{5}} + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}}) =$$
$$e^{\frac{2i\pi+0\times i\pi}{5}} + e^{\frac{2i\pi+2i\pi}{5}} + e^{\frac{2i\pi+4i\pi}{5}} + e^{\frac{2i\pi+6i\pi}{5}} + e^{\frac{2i\pi+8i\pi}{5}} =$$
$$e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}} + e^{\frac{10i\pi}{5}} =$$
$$e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}} + e^{\frac{0\times i\pi}{5}} =$$
$$e^{\frac{0\times i\pi}{5}} + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}} = \xi_0 + \cdots + \xi_4. \quad \textbf{(3 pt)}$$

c. Soit $z = \xi_0 + \cdots + \xi_4$. D'après le b, $\xi z = z$. Du coup, $(\xi - 1)z = \xi z - z = 0$. Comme $\xi \neq 1$, on en déduit que $z = 0$. **(1 pt)**

Exercice 3. a. Il suffit de montrer, par exemple, que les nombres complexes a, d, c ne sont pas alignés. Or,

$$\frac{c-a}{d-a} = \frac{(-2+4i)-(1+3i)}{(3-i)-(1+3i)} = \frac{-3+i}{2-4i} = \tfrac{1}{2}\frac{-3+i}{1-2i} =$$
$$\tfrac{1}{2}\frac{(-3+i)(1+2i)}{1^2+(-2)^2} = \tfrac{1}{10}(-5-5i) = -\tfrac{1}{2}(1+i)$$

n'est pas réel. Par conséquent, les nombres complexes a, d, c ne sont pas alignés. **(2 pt)**

b. Calculons le birapport de a, b, c, d :

$$\frac{\frac{c-a}{d-a}}{\frac{c-b}{d-b}} = \frac{c-a}{d-a}\frac{d-b}{c-b} = -\tfrac{1}{2}(1+i)\frac{(3-i)-(-5-5i)}{(-2+4i)-(-5-5i)} =$$
$$-\tfrac{1}{2}(1+i)\frac{8+4i}{3+9i} = -\tfrac{1}{2}(1+i)\tfrac{4}{3}\frac{2+i}{1+3i} = -\tfrac{2}{3}(1+i)\frac{(2+i)(1-3i)}{1^2+3^2} =$$
$$-\tfrac{1}{15}(1+i)(2+i)(1-3i) = -\tfrac{1}{15}(1+3i)(1-3i) = -\tfrac{1}{15}|1+3i|^2 = -\tfrac{1}{15}10 = -\tfrac{2}{3}.$$

Comme ce nombre est réel, les nombres complexes a, b, c, d sont cocycliques. **(4 pt)**

Exercice 4. Dressons une table de vérité :

A	B	C	B et C	A ou (B et C)	A ou B	A ou C	(A ou B) et (A ou C)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

On constate que les colonnes $(A \,\mathrm{ou}\, (B \,\mathrm{et}\, C))$ et $((A \,\mathrm{ou}\, B) \,\mathrm{et}\, (A \,\mathrm{ou}\, C))$ sont identiques. Les assertions en question sont donc équivalentes. **(4 pt)**