Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS 1

ALGEBRE ET GEOMETRIE

Examen terminal, le 5 janvier 2015, 9h00-12h00

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Enoncer le Théorème de la division euclidienne dans $K[X]$ où K est un corps.

Exercice 1. Soient E, F et G des ensembles. Soient $f\colon E \to F$, $g\colon F \to G$ et $h\colon F \to G$ des applications ensemblistes. On suppose que $g \circ f = h \circ f$.

a. Montrer que $g = h$ lorsque f est surjective.

b. Donner un exemple explicite d'ensembles E, F et G, et d'applications $f\colon E \to F$, $g\colon F \to G$ et $h\colon F \to G$ tels que $g \neq h$ mais $g \circ f = h \circ f$.

Exercice 2. Soit R la relation sur l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par

$$(a, b)\, R\, (a', b') \Leftrightarrow a \leq a' \text{ et } b \leq b',$$

pour tout $(a, b), (a', b') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

a. Montrer que R est une relation d'ordre sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

b. La relation d'ordre R est-elle totale ? Si oui, le montrer. Si non, dire pourquoi elle ne l'est pas.

c. Est-ce que tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ possède un plus petit élément par rapport à la relation d'ordre R ? Si oui, le montrer. Si non, donner un contre-exemple explicite.

Exercice 3. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Supposons que a et b divisent c.

a. Montrer que ab divise c lorsque a et b sont premiers entre eux.

b. Donner un exemple explicite où ab ne divise pas c mais où a et b divisent c.

Exercice 4. Soient A et B les polynômes dans $\mathbb{Q}[X]$ définis par

$$A = X^4 + 6X^3 + 16X^2 + 21X + 12 \quad \text{et} \quad B = X^3 + 4X^2 + 7X + 5$$

a. Montrer qu'il existe $U, V \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $UA + VB = 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$. (On remarquera que les coefficients de U et V sont des entiers relatifs si on détermine ces derniers par l'algorithme d'Euclide étendu.)

b. En utilisant le a, déterminer des entiers relatifs u et v tels que

$$u \times 17822 + v \times 1475 = 1.$$

c. En déduire que les entiers relatifs 17822 et 1475 sont premiers entre eux.

Exercice 5. Soit P le polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ défini par

$$P = X^4 + 3\,X^2 + 1.$$

T. S. V. P.

a. Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

b. Sans déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$, peut-on dire d'avance combien il y en a ? Expliquer pourquoi.

c. Déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$.

d. Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$.

e. Le polynôme P est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$? Si oui, dire pourquoi. Sinon, donner sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ le polynôme défini par

$$P = X^7 + 2X^6 - 5X^5 - 17X^4 - 26X^3 - 31X^2 - 20X - 12.$$

a. Montrer que, si P possède une racine en un entier relatif a, alors $a|12$ dans $\mathbb{Z}$.

b. En déduire les racines de P dans $\mathbb{Z}$. (Indication : utiliser l'écriture

$$P = ((((((X + 2)X - 5)X - 17)X - 26)X - 31)X - 20)X - 12$$

dans l'évaluation de P en un entier différent de ± 1.)

c. Montrer que, si P possède une racine double en un entier a, alors $a^2|12$ dans $\mathbb{Z}$.

d. En déduire les racines doubles de P dans $\mathbb{Z}$.

Barème indicatif sur 20 points :

Q de cours	2 pt
Exercice 1	2 pt
Exercice 2	3 pt
Exercice 3	2 pt
Exercice 4	3 pt
Exercice 5	4 pt
Exercice 6	4 pt

T. S. V. P.