Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS 1

ALGEBRE ET GEOMETRIE

Examen terminal particulier, le 29 janvier 2015, 13h30-16h30

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Enoncer et démontrer le Lemme de Gauss dans $K[X]$ où K est un corps. (On pourra admettre le Théorème de Bézout dans $K[X]$.)

Exercice 1. Chaque assertion suivante est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la montrer ; si elle est fausse, donner un contre-exemple.

a. Si $\pi^2 \leq 0$, alors $\pi^2 \geq 0$.

b. Quelque soient les ensembles A, B, C on a $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

c. Pour toute application ensembliste $f\colon E \to F$ on a $f(f^{-1}(F)) = F$.

d. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ on a $a + b = 0$ implique $a = 0$ ou $b = 0$.

e. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ on a $ab = 1$ implique $a = 1$ ou $b = 1$.

f. $1789|0$ dans $\mathbb{Z}$.

g. Le reste dans la division euclidienne de -365 par -7 est égal à -1.

h. Pour tout polynôme P en X à coefficients dans un corps K, et pour tout $a \in K$ on a l'énoncé suivant. Si a est racine double de P, alors a^2 est racine simple de P.

i. Pour tout polynôme P en X à coefficients dans un corps K on a l'énoncé suivant. Si P possède une racine dans K, alors P est réductible.

j. Pour tout polynôme P en X à coefficients dans un corps K on a l'énoncé suivant. Si P ne possède pas de racine dans K, alors P est irréductible.

Exercice 2. Soient E, F et G des ensembles. Soient $f\colon E \to F$, $g\colon E \to F$ et $h\colon F \to G$ des applications ensemblistes. On suppose que $h \circ f = h \circ g$.

a. Montrer que $f = g$ lorsque h est injective.

b. Donner un exemple explicite d'ensembles E, F et G, et d'applications $f\colon E \to F$, $g\colon E \to F$ et $h\colon F \to G$ tels que $f \neq g$ mais $h \circ f = h \circ g$.

Exercice 3. Soit R la relation sur l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par

$$(a, b)\, R\, (a', b') \Leftrightarrow a \leq a' \text{ ou } b \leq b',$$

pour tout $(a, b), (a', b') \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. La relation R est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$? Si oui, le montrer. Si non, dire pourquoi elle ne l'est pas.

Exercice 4. Soient A et B les polynômes dans $\mathbb{Q}[X]$ définis par

$$A = X^6 + 5X^5 + 13X^4 + 23X^3 + 26X^2 + 19X + 6$$

et

$$B = X^5 + 4X^4 + 8X^3 + 12X^2 + 10X + 4.$$

T. S. V. P.

a. Déterminer le pgcd D de A et B, et déterminer $U, V \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $UA + VB = D$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

b. Déterminer toutes les racines communes de A et B dans $\mathbb{C}$.

Exercice 5. Soit P le polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ défini par

$$P = 5X^{10} + 10X^8 + 8X^6 + 2X^4 + X^2 + 3.$$

a. Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

b. Sans déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$, peut-on dire d'avance combien il y en a ? Expliquer pourquoi.

Exercice 6. Soit P le polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ défini par

$$P = X^4 + 10\,X^2 + 169.$$

a. Déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$.

b. Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$.

c. Le polynôme P est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$? Si oui, dire pourquoi. Sinon, donner sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Barème indicatif sur 20 points :

Q de cours	4 pt
Exercice 1	4 pt
Exercice 2	2 pt
Exercice 3	2 pt
Exercice 4	3 pt
Exercice 5	2 pt
Exercice 6	3 pt

T. S. V. P.