Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE 1ERE ANNEE IMP ENTREE A
PARCOURS MASS

ALGEBRE LINEAIRE 1

Contrôle continu, le 7 mars 2007, 15h45–16h15

Corrigé et barème

Question de cours. La dimension d'un espace vectoriel et le cardinal d'une base de l'espace vectoriel **(4 pt)**

Exercice 1. a. Si le vecteur (x, y, z) appartient à P, on a $x - 4y + z = 0$, i.e., $x = 4y - z$. Du coup,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soient

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a bien $v, w \in P$ et, d'après ce qu'on a vu ci-dessus, la famile v, w engendre P **(1 pt)**. Montrons qu'elle est également libre.

Supposons que $\lambda v + \mu w = 0$ dans $\mathbb{R}^2$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a donc

$$\begin{cases} 4\lambda - \mu = 0 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

D'où $\lambda = 0$ et $\mu = 0$, i.e., v, w est libre **(1 pt)**. Elle est donc une base de P **(1 pt)**.

b. Si le vecteur (x, y, z) appartient à l'intersection $P \cap Q$, on a

$$\begin{cases} x - 4y + 2z = 0 \\ 2x - 7y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -6z \\ y = -z \end{cases}$$

Du coup,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit v le vecteur $(-6, -1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$. On a bien $v \in P$ et $v \in Q$, donc $v \in P \cap Q$. D'après ce qui précède, v est générateur de $P \cap Q$ **(1 pt)**. Comme $v \neq 0$, v est une famille libre, c'est donc une base de $P \cap Q$ **(1 pt)**.

c. Comme $P \cap Q$ a une base à un élément, $\dim(P \cap Q) = 1$, i.e., $P \cap Q$ est une droite vectorielle dans $\mathbb{R}^3$ **(1 pt)**.