Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE IMP
PARCOURS MASS

ALGEBRE LINEAIRE 1

Examen, le 15 juin 2007, 13h30-15h30

Documents et calculatrices sont interdits.
Barème indicatif. Question de cours : **2 points**, exercice 1 : **5 points**, exercice 2 : **5 points**, exercice 3 : **8 points**.

Question de cours. Enoncer le théorème de la diagonalisation d'une matrice carrée.

Exercice 1. Soient

$$v_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -13 \\ -4 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; v_4 = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \; v_5 = \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par v_1, v_2, v_3, et soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par v_4, v_5.

a. Montrer que le sous-ensemble V de $\mathbb{R}^4$ peut être donné par une équation linéaire, et en déterminer une.
b. Montrer que le sous-ensemble W de $\mathbb{R}^4$ peut être donné par deux équations linéaires, et en déterminer deux.
c. Déterminer une base de $V \cap W$.
d. Quelle est la dimension de $V + W$?

Exercice 2. Soit A la matrice 4×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 4 & -6 & -2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par $f(v) = Av$ pour tout $v \in \mathbb{R}^3$.

T. S. V. P.

a. Déterminer une base de $\ker(f)$.

b. La compléter en une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

c. Déterminer une base $\mathcal{C}'$ de $\mathbb{R}^4$ telle que la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ soit égale à la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit A la matrice 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -4 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

b. Quelles sont les valeurs propres de A ?

c. Pourquoi la matrice A est-elle diagonalisable ?

d. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

e. Quelle est la matrice $A' = P^{-1}AP$?

f. Déterminer A^k, pour un entier naturel k quelconque.

T. S. V. P.