Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE 2 D'INFORMATIQUE PARCOURS IL

# REDUCTION DES APPLICATIONS LINEAIRES

Controle continu, le 13 décembre 2006, 13h30-14h00
CORRIGE et BAREME

**Exercice 1.** a. Comme $A$ est symétrique, $A$ est diagonalisable d'après le théorème spectrale **(1 pt)**.

b. On calcule

$$\det(A - XI) = \det \begin{pmatrix} 3-X & 1 & 1 \\ 1 & 3-X & -1 \\ 1 & -1 & 3-X \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 3-X & 1 & 1 \\ 4-X & 4-X & 0 \\ 1 & -1 & 3-X \end{pmatrix} = (4-X)\det \begin{pmatrix} 3-X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3-X \end{pmatrix} =$$

$$= (4-X)\left(\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + (3-X)\det \begin{pmatrix} 3-X & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$(4-X)(X^2 - 5X + 4) = -(X-1)(X-4)^2 \quad \textbf{(2 pt)}.$$

c. Les valeurs propres de $A$ sont 1 et 4, de multiplicité 1 et 2, respectivement.

Une base pour l'espace propre $E_1$ est

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Comme on cherche une base orthonormée de vecteurs propres de $\mathbb{R}^3$, on prend

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Une base pour l'espace propre $E_4$ est

$$w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

On doit orthogonaliser cette base-là et on pose

$$w_3' = w_3 - \frac{1}{2}w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

Comme on cherche une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, on pose

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$v_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}w_3' = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

La base $v_1, v_2, v_3$ est bien une base orthonormée de vecteurs propres de $A$. On pose

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 3\sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} & 3\sqrt{2} & -\sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}.$$

La matrice $P$ est bien orthogonale, et, d'après le théorème spectrale,

$$A' = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

est diagonale.

d. On a

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz - 2yz &= {}^tvAv = {}^tvPA'({}^tP)v = \\ &= {}^t({}^tPv)A'({}^tPv) = {}^tv'A'v' = 4(x')^2 + 4(y')^2 + (z')^2, \end{aligned}$$

où

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } v' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = {}^tPv \quad \textbf{(1 pt)}.$$