Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE 2 D'INFORMATIQUE PARCOURS IL

# REDUCTION DES APPLICATIONS LINEAIRES

## Examen terminal, le 18 décembre 2006, 8h30–11h30

*Les documents sont interdits. Lorsque vous faites des calculs à l'aide de Maple, il suffit de préciser sur la copie les commandes que vous avez effectuées et de donner la réponse du calcul. Il sera tenu compte de la justification des calculs et des commentaires précis quant aux résultats donnés par maple.*

Barème indicatif. Exercice 1 : **2 pts**, exercice 2 : **2 pts**, exercice 3 : **3 pts**, exercice 4 : **4 pts**, exercice 5 : **5 pts**, exercice 6 : **4 pts**,

**Exercice 1.** Soit $V$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par la famille

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer un supplémentaire du sous-espace vectoriel $V$ dans $\mathbb{R}^5$ en en donnant une base.

**Exercice 2.** Extraire de la famille

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

une base de $\mathbb{R}^4$.

**Exercice 3.** Pour chacune des matrices suivantes, dire si elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ou non.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 4.** Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & b \\ 0 & 4 & c \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a, b, c$ pour que $A$ soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 5.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 & -1 \\ -7 & -11 & -6 & -1 \\ 8 & 7 & 0 & 2 \\ 12 & 15 & 12 & -6 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que $A$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer une matrice inversible $P$ telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure par une méthode itérative en détaillant pas à pas.

**Exercice 6.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & 3 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -5 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -5 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 3 & -2 & 3 \\ -3 & -3 & 0 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

a. Vérifier que les sous-espaces propres de $A$ sont 2-à-2 orthogonaux.

b. Déterminer une matrice orthogonale $P$ telle que ${}^tPAP$ est diagonale.