Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE 2 D'INFORMATIQUE PARCOURS IL

REDUCTION DES APPLICATIONS LINEAIRES

Examen terminal, le 11 janvier 2008, 9h00–12h00

Les documents sont interdits. Lorsque vous faites des calculs à l'aide de Maple, il suffit de préciser sur la copie les commandes que vous avez effectuées et de donner la réponse du calcul. Il sera tenu compte de la justification des calculs et des commentaires précis quant aux résultats donnés par Maple.

Question de cours. Enoncer le Théorème Spectrale complexe.

Exercice 1. Soient V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par la famille

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -30 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

et W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ des vecteurs (x, y, z, t, u) satisfaisant les équations

$$\begin{cases} 2\,x + y + 2\,z - 8\,t - 4\,u = 0 \\ -3\,x + 2\,y - 10\,z + 19\,t + 6\,u = 0 \\ -2\,x - 4\,z + 10\,t + 4\,u = 0 \end{cases}$$

a. Déterminer $\dim(V)$.
b. Déterminer $\dim(W)$.
c. Déterminer $\dim(V + W)$.
d. Déterminer $\dim(V \cap W)$.

Exercice 2. Soient a, b des nombres réels et soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} -4 - 5\,b + a & -14\,b - 12 & -13\,b - 10 & 22\,b + 20 \\ -2 & a + b - 6 & -5 & -2\,b + 10 \\ 2 + 2\,b & 6\,b + 4 & a + 5\,b + 4 & -8\,b - 8 \\ -1 & b - 4 & -3 & -b + a + 6 \end{pmatrix}.$$

T. S. V. P.

a. Déterminer un condition nécessaire et suffissante portant sur a et b pour que la matrice A soit trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer une matrice P réelle et inversible telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieur lorsque $a = 2$ et $b = 0$.

c. Déterminer une matrice P complexe et inversible telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieur lorsque $a = 0$ et $b = 1$.

d. Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} -112 & -84 & -480 \\ -84 & -63 & -360 \\ -480 & -360 & 175 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une matrice orhogonale P telle que ${}^tPAP$ est diagonale.

Exercice 4. Soit φ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^5$ définie par $\varphi(v) = {}^tvAv$, où

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & -5 & -6 & 1 \\ -4 & -5 & -2 & -3 & -4 \\ -2 & -6 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer le rang et l'indice de la forme quadratique φ.

Barème indicatif sur 20 points :

Q de cours	2 pt
Exercice 1	5 pt
Exercice 2	7 pt
Exercice 3	3 pt
Exercice 4	3 pt

T. S. V. P.