Université de Bretagne Occidentale

UFR Sciences et Techniques

LICENCE 2 D'INFORMATIQUE PARCOURS IL

REDUCTION DES APPLICATIONS LINEAIRES

Examen terminal, le 13 juin 2008, 8h00–11h00

Les documents sont interdits. Lorsque vous faites des calculs à l'aide de Maple, il suffit de préciser sur la copie les commandes que vous avez effectuées et de donner la réponse du calcul. Il sera tenu compte de la justification des calculs et des commentaires précis quant aux résultats donnés par Maple.

Question de cours. Enoncer le Théorème Spectrale réel.

Exercice 1. Soient V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^6$ défini par les équations

$$\begin{aligned} &x_1 - 2x_2 + 3x_4 + x_5 - x_6 = 0 \quad \text{et} \\ &2x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 0, \end{aligned}$$

et soient

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

a. Montrer que $v_1, v_2 \in V$.

b. Montrer que v_1, v_2 est libre.

c. Compléter v_1, v_2 en une base de V.

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 4x_4 - 7x_5 \\ x_2 + 9x_3 + x_4 + 21x_5 \\ -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 11x_5 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que f est linéaire.

b. Déterminer une base de $\ker(f)$.

T. S. V. P.

c. Déterminer une base de $\mathrm{im}(f)$.

d. Quel est le rang de f ?

e. Déterminer des bases $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^5$ et $\mathcal{C}'$ de $\mathbb{R}^4$ dans lesquelles la matrice de f est la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et soit

$$A = \begin{pmatrix} 1-2a & 4a & -6a+2b+1 & -2a+2b-1 & 4a-4b+4 \\ -a & 2a+1 & -3a+2b+2 & -a+2b & 2a-4b+1 \\ 0 & 0 & b+2 & b & -2b \\ 0 & 0 & -b & 2-b & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Donner une condition nécessaire et suffissante sur a, b pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b. Supposons que a, b satisfont la condition ci-dessus. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale

Exercice 4. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -12 & 12 & -8 \\ 4 & 6 & -9 & -1 \\ 4 & -3 & 0 & -7 \\ -4 & -12 & 12 & -5 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure par une méthode itérative en détaillant pas à pas.

Barème indicatif sur 20 points :

Q de cours	2 pt
Exercice 1	3 pt
Exercice 2	4 pt
Exercice 3	6 pt
Exercice 4	5 pt

T. S. V. P.