Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE DE MATHEMATIQUES

ANALYSE DANS $\mathbb{R}^n$

Contrôle continu, le 9 avril 2013, 13h45-14h15

Documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1. Soit T le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y \text{ et } y > 0\}.$$

Soit $f\colon T \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x, y) = \left(\tfrac{1}{2}(x + y), \sqrt{xy}\right).$$

Soit encore $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$g(u, v) = \cos^2(u) + \sin^2(v).$$

a. Esquisser le sous-ensemble T de $\mathbb{R}^2$.
b. Montrer que f est différentiable sur T et déterminer la différentielle $D_{(x,y)}f$ de f en tout point $(x, y) \in T$.
c. Montrer que g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer la différentielle $D_{(u,v)}g$ de g en tout point $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
d. Montrer que $g \circ f$ est différentiable sur T et déterminer la différentielle $D_{(x,y)}(g \circ f)$ de $g \circ f$ en tout point $(x, y) \in T$.
e. Montrer que $f(T) \subseteq T$.
f. Montrer que f est une bijection de T sur T et déterminer l'application réciproque f^{-1}.
g. Montrer que f^{-1} est différentiable sur T et déterminer la différentielle $D_{(u,v)}(f^{-1})$ de f^{-1} en tout point $(u, v) \in T$.