Université de Bretagne Occidentale

UFR Sciences et Techniques

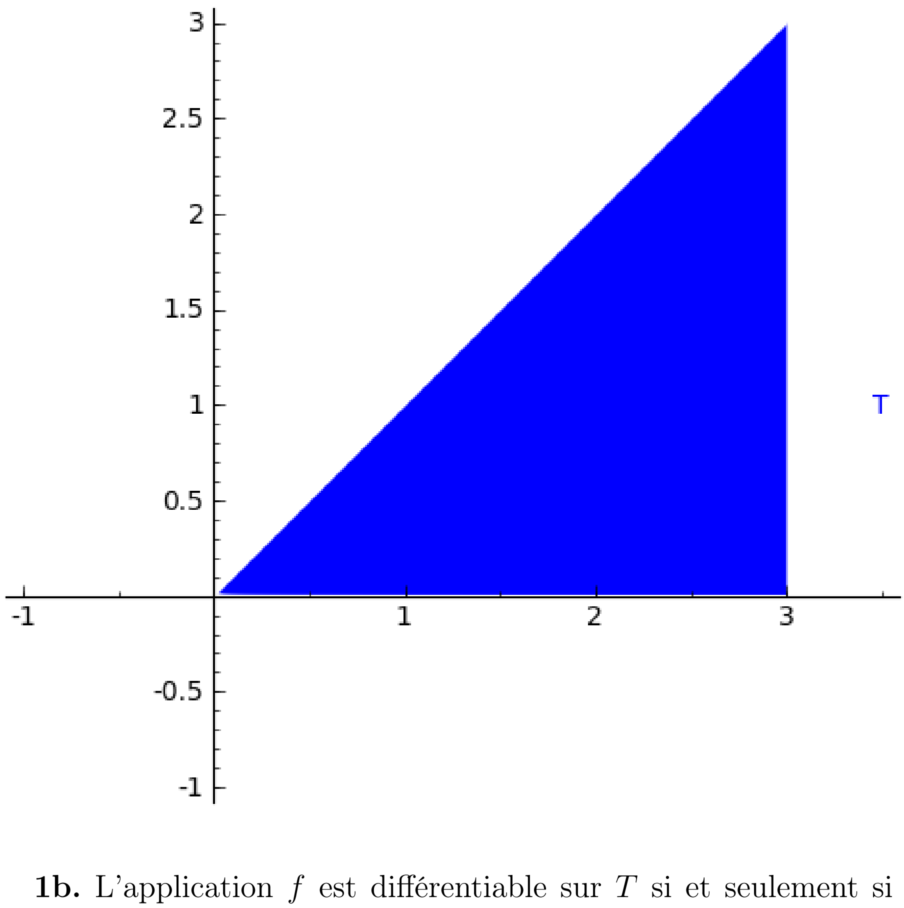
LICENCE DE MATHEMATIQUES

ANALYSE DANS $\mathbb{R}^n$

Contrôle continu, le 9 avril 2013, 13h45-14h15

CORRIGE

1a.



1b. L'application f est différentiable sur T si et seulement si ses deux fonctions coordonnées f_1 et f_2 le sont. Ici, $f_1(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)$ et $f_2(x, y) = \sqrt{xy}$. La première est différentiable car f_1 est la restriction à T d'une fonction linéaire définie sur $\mathbb{R}^2$. Pour voir que la deuxième est différentiable sur T, notons k la fonction de T dans $\mathbb{R}^{\star+}$ définie par $k(x, y) = xy$ et notons h la fonction de $\mathbb{R}^{\star+}$ dans lui-même définie par $h(t) = \sqrt{t}$. La fonction f_2 est égale à la composition $h \circ k$. Or, k est différentiable car k est la restriction à T de la fonction polynomiale $(x,y) \mapsto xy$ définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier, et h est dérivable sur $\mathbb{R}^{\star +}$. Par conséquent, la composition $h \circ k = f_2$ est différentiable sur T.

La différentielle $D_{(x,y)} f$ de f en (x,y) est l'application linéare de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même dont la matrice dans la base standard est la matrice jacobienne

$$J_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\frac{y}{x}} & \sqrt{\frac{x}{y}} \end{pmatrix}.$$

1c. Les fonctions $(u,v) \mapsto u$ et $(u,v) \mapsto v$ sont linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et donc différentiables. Les fonctions $t \mapsto \cos^2(t)$ et $t \mapsto \sin^2(t)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et donc différentiables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Du coup, les compositions $(u,v) \mapsto \cos^2(u)$ et $(u,v) \mapsto \sin^2(v)$ sont différentiables de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Par conséquent, leur somme g est différentiable.

La différentielle $D_{(u,v)} g$ de g en (u,v) est l'application linéare de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dont la matrice dans les bases standards est la matrice jacobienne

$$J_{(u,v)} g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(2u) & \sin(2v) \end{pmatrix}.$$

1d. La composition $g \circ f$ est différentiable sur T car f est différentiable sur T et g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. De plus,

$$D_{(x,y)}(g \circ f) = (D_{(u,v)} g) \circ (D_{(x,y)} f),$$

où $(u,v) = f(x,y)$. Il s'ensuit que la matrice de $D_{(x,y)}(g \circ f)$ dans les bases standards est

$$\begin{aligned} J_{(x,y)}(g \circ f) = (J_{(u,v)} g) \cdot (J_{(x,y)} f) = \\ \begin{pmatrix} -\sin(2u) & \sin(2v) \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\frac{y}{x}} & \sqrt{\frac{x}{y}} \end{pmatrix} = \\ \tfrac{1}{2} \left(-\sin(2u) + \sqrt{\tfrac{y}{x}} \sin(2v) \quad -\sin(2u) + \sqrt{\tfrac{x}{y}} \sin(2v) \right) = \\ \tfrac{1}{2} \left(-\sin(x+y) + \sqrt{\tfrac{y}{x}} \sin(2\sqrt{xy}) \quad -\sin(x+y) + \sqrt{\tfrac{x}{y}} \sin(2\sqrt{xy}) \right). \end{aligned}$$

1e. Soit $(x,y) \in T$. L'image par f de (x,y) est $(\frac{1}{2}(x+y), \sqrt{xy})$. Pour montrer que $f(x,y) \in T$, on doit montrer que $\frac{1}{2}(x+y) > \sqrt{xy}$ et que $\sqrt{xy} > 0$. Cette dernière inégalité est évidente puisque $x, y \neq 0$. Pour montrer la première inégalité, remarquons que $x \neq y$. On a donc $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 > 0$. Du coup, $x - 2\sqrt{xy} + y > 0$, ou encore $x + y > 2\sqrt{xy}$. En divisant par 2 on obtient $\frac{1}{2}(x+y) > \sqrt{xy}$. Cela montre bien que $f(x,y) \in T$ lorsque $(x,y) \in T$.

1f. On commence par montrer que $f\colon T \to T$ est surjective. Soit $(u,v) \in T$. On résoud le système d'équations

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x+y) = u \\ \sqrt{xy} = v \end{cases}$$

en x, y, et on cherche une solution où $x > y > 0$. Si de plus, il n'y a qu'une solution avec $x > y > 0$, on aura démontré l'injectivité de f.

La première équation permet d'exprimer y en fonction de x et u, et on obtient ainsi $y = 2u - x$. On substitue dans la deuxième équation, qu'on élève au carré, et on obtient l'équation $x(2u-x) = v^2$, ou encore $x^2 - 2ux + v^2 = 0$. Le discriminant de cette équation en x est $4u^2 - 4v^2 = 4(u-v)(u+v)$. Il est strictement positif car $u > v > 0$. L'équation possède donc deux solutions réelles : $x = u \pm \sqrt{u^2 - v^2}$. Les valeurs correspondantes de y sont $y = u \mp \sqrt{u^2 - v^2}$. Comme $u - \sqrt{u^2 - v^2} < u + \sqrt{u^2 - v^2}$, on voit que $x = u + \sqrt{u^2 - v^2}$ et $y = u - \sqrt{u^2 - v^2}$ constituent l'unique solution du système d'équation pour laquelle $x > y > 0$. Cela montre bien que f est surjective et injective. De plus, on en déduit que l'application inverse f^{-1} est déterminée par

$$f^{-1}(u,v) = (u + \sqrt{u^2 - v^2}, u - \sqrt{u^2 - v^2}).$$

1g. Sur T, la fonction $(u,v) \mapsto u^2 - v^2$ est différentiable et est à valeurs dans $\mathbb{R}^{\star+}$. Du coup, la fonction $(u,v) \mapsto \sqrt{u^2 - v^2}$ est différentiable sur T. Il s'ensuit que les fonctions coordonnées f_1^{-1} et f_2^{-1} de f^{-1} sont différentiables. Par conséquent, f^{-1} est différentiable.

On sait que

$$D_{(u,v)}(f^{-1}) = (D_{(x,y)}f)^{-1},$$

où $(x,y) = f^{-1}(u,v)$. Du coup, $D_{(u,v)}(f^{-1})$ est l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base standard est

$$J_{(u,v)}(f^{-1}) = (J_{(x,y)}f)^{-1} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\frac{y}{x}} & \sqrt{\frac{x}{y}} \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$\frac{2\sqrt{xy}}{x-y} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{x}{y}} & -1 \\ -\sqrt{\frac{y}{x}} & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{x-y} \begin{pmatrix} x & -\sqrt{xy} \\ -y & \sqrt{xy} \end{pmatrix}$$

Or, $\sqrt{xy} = v$, $x = u + \sqrt{u^2 - v^2}$, $y = u - \sqrt{u^2 - v^2}$, et donc $x - y = 2\sqrt{u^2 - v^2}$. Il s'ensuit que

$$J_{(u,v)}(f^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - v^2}} \begin{pmatrix} u + \sqrt{u^2 - v^2} & -v \\ -u + \sqrt{u^2 - v^2} & v \end{pmatrix}.$$

Une autre méthode consiste à calculer $J_{(x,y)}(f^{-1})$ directement :

$$J_{(u,v)}(f^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial x} & \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial x} & \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{u}{u^2-v^2} & \frac{-v}{u^2-v^2} \\ 1 - \frac{u}{u^2-v^2} & \frac{v}{u^2-v^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{u^2-v^2}} \begin{pmatrix} u + \sqrt{u^2-v^2} & -v \\ -u + \sqrt{u^2-v^2} & v \end{pmatrix},$$

ce qui donne heureusement le même résultat que celui de la première méthode.