Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE DE MATHEMATIQUES

ANALYSE DANS $\mathbb{R}^n$

Examen terminal, le 19 juin 2013, 13h30-16h30

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Soit U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $a \in U$. Soit $f\colon U \to \mathbb{R}$. Donner la définition de la différentiabilité de f en a.

Exercice 1. Soit $f\colon]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\to \mathbb{R}^2$ la fonction vectorielle définie par

$$f(t) = \left(t^2 - 1, t^3 - 2t\right).$$

Soit $g\colon]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(t) = ||f(t)||.$$

a. Montrer que f est dérivable sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.
b. Montrer que g est dérivable sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.
c. Déterminer les valeurs de $t \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ pour lesquelles la distance de 0 à $f(t)$ est localement extrémale.
d. Pour quelles valeurs de $t \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, la distance de 0 à $f(t)$ est-elle localement minimale ?
e. Pour quelles valeurs de $t \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, la distance de 0 à $f(t)$ est-elle localement maximale ?

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{x^4}{x^2 + y^2}.$$

a. Montrer que f est partiellement dérivable sur $\mathbb{R}^2$.
b. Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
c. En déduire que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
d. Déterminer la jacobienne de f en (x, y).

Exercice 3. Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ et soit $\varphi\colon U \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ la fonction définie par

$$\varphi(x, y) = \arctan \frac{y}{x}.$$

T. S. V. P.

Soit $r\colon]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$r(t)=\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-t^2}.$$

Soit encore $f\colon U\to\mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x,y)=r(\varphi(x,y))\cdot(x,y).$$

a. Montrer que f est différentiable sur U.

b. Déterminer la jacobienne de f en (x,y), pour tout $(x,y)\in U$.

Exercice 4. Définissons une fonction réelle, notée $||\cdot||'$, sur $\mathbb{R}^3$ par

$$||(x,y,z)||'=|x|+\max\{|y|,|z|\}.$$

a. Montrer que $||\cdot||'$ est une norme sur $\mathbb{R}^3$.

b. Montrer qu'il existe des nombres réels $m,M>0$ tels que

$$m||(x,y,z)||\le||(x,y,z)||'\le M||(x,y,z)||,$$

pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, où $||\cdot||$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$.

c. Déterminer explicitement des nombres réels strictement positifs m et M tels que les deux inégalités ci-dessus sont vérifiées.

Exercice 5. Soit $f\colon\mathbb{R}^{\star+}\times\mathbb{R}^{\star+}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,t)=\frac{1}{\sqrt{t^3+x}}.$$

a. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^{\star+}$, la fonction $f_x\colon\mathbb{R}^{\star+}\to\mathbb{R}$ définie par $f_x(t)=f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{\star+}$ au sens de Henstock-Kurzweil.

Dans la suite on définit $F\colon\mathbb{R}^{\star+}\to\mathbb{R}$ par

$$F(x)=\int_0^\infty f(x,t)dt.$$

b. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^{\star+}$.

c. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{\star+}$.

d. Montrer que F' est continue sur $\mathbb{R}^{\star+}$.

e. Est-ce que la limite $\lim_{x\downarrow 0}F(x)$ existe ?