Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE DE MATHEMATIQUES

ANALYSE DANS $\mathbb{R}^n$

Contrôle continu, le 11 février 2014, 10h15-10h45

CORRIGE et BAREME

Exercice 1. a. **(2 pts)** D'après le cours, une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si les deux fonctions coordonnées f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Or, $f_1(t) = \cos(t)$ et $f_2(t) = \sin(t)$. Les fonctions f_1 et f_2 sont bien de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par conséquent, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

b. **(2 pts)** D'après le cours, $f' = (f_1', f_2')$. Comme $f_1'(t) = -\sin(t)$ et $f_2'(t) = \cos(t)$, on a

$$f'(t) = (-\sin(t), \cos(t)).$$

c. D'après le cours, l'inégalité des accroissements finis est l'énoncé suivant : Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une application continue, dérivable sur $]a,b[$. Alors,

$$||f(b) - f(a)|| \leq \sup_{c\in]a,b[} ||f'(c)|| \cdot |b-a| \quad \textbf{(2 pts)}.$$

Ici, $n = 2$ et

$$||f'(c)|| = \sqrt{(-\sin(c))^2 + (\cos(c))^2} = 1,$$

quel que soit c, d'après le b. Du coup,

$$\sup_{c\in]a,b[} ||f'(c)|| = 1 \quad \textbf{(1 pt)},$$

et l'inégalité des accroissements finis pour l'application f est

$$||f(b) - f(a)|| \leq |b-a|,$$

quels que soient $a < b$.

Si on prend $a = 0$ et $b = t > 0$, on a

$$||(\cos(t), \sin(t)) - (1,0)|| \leq t.$$

D'où

$$(\cos(t) - 1)^2 + \sin^2(t) \leq t^2,$$

i.e.,

$$-2\cos(t) + 2 \leq t^2.$$

On obtient

$$\cos(t) \geq 1 - \tfrac{1}{2}t^2 \quad \textbf{(1 pt)}.$$

d. Si $t < 0$, on peut prendre $a = t$ et $b = 0$ dans le c, et on obtient

$$||(1, 0) - (\cos(t), \sin(t))|| \leq -t.$$

D'où

$$(1 - \cos(t))^2 + (-\sin(t))^2 \leq t^2,$$

i.e.,

$$-2\cos(t) + 2 \leq t^2.$$

On obtient encore

$$\cos(t) \geq 1 - \tfrac{1}{2}t^2 \quad \textbf{(1 pt)}.$$

e. C'est clair à partir des résultats des c et d. **(1 pt)**