Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE DE MATHEMATIQUES

ANALYSE DANS $\mathbb{R}^n$

Contrôle continu, le 12 février 2015, 10h15-10h45

CORRIGE et BAREME

Exercice 1. a. D'après le cours, la fonction f est continue si et seulement si les fonctions f_1 et f_2 le sont **(0,5 pt)**.

La fonction f_1 est définie par $f_1(t) = e^{-\frac{1}{t}}$ pour $t > 0$, et $f_1(0) = 0$. Montrons d'abord que f_1 est continue sur $]0, +\infty[$. En effet, la fonction $t \mapsto t$ est continue et non nulle sur $]0, +\infty[$. Du coup, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Comme la fonction constante $t \mapsto -1$ est continue, la fonction produit $t \mapsto -\frac{1}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. La fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$. La composition des deux dernières fonctions $t \mapsto e^{-\frac{1}{t}}$ est donc continue sur $]0, +\infty[$. Cela montre que f_1 est continue sur $]0, +\infty[$ **(0,5 pt)**.

Afin de montrer que f_1 est continue en 0, montrons que $\lim_{t\downarrow 0} f_1(t) = f_1(0)$. Or, lorsque $t \neq 0$, l'expression $e^{-\frac{1}{t}}$ tend vers 0 si t tend vers 0 par valeurs positives. On a donc bien $\lim_{t\downarrow 0} f_1(t) = 0 = f_1(0)$. Il s'ensuit que f_1 est continue sur $[0, +\infty[$ **(0,5 pt)**.

Montrons ensuite que la fonction f_2 est continue sur $[0, +\infty[$. La fonction f_2 est définie par $f_2(t) = \sin(\sqrt{t})/\sqrt{t}$ pour $t > 0$, et $f_2(0) = 1$. Comme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

on a $\lim_{t\downarrow 0} f_2(t) = 1$, et f_2 est continue en 0 **(0,5 pt)**. La continuïté de f_2 sur $]0, +\infty[$ est claire car sur cet ensemble f_2 est le quotient d'une fonction continue $t \mapsto \sin(\sqrt{t})$ par une fonction continue $t \mapsto \sqrt{t}$ ne s'annulant pas **(0,5 pt)**.

b. Lorsque $t \to +\infty$, on a $e^{-\frac{1}{t}} \to 1$ et $\sin(\sqrt{t})/\sqrt{t} \to 0$. Du coup, $\lim_{t\to+\infty} f(t) = (1, 0)$ (voir Figure 1) **(0,5 pt)**.

c. Comme $t \mapsto -\frac{1}{t}$ et $x \mapsto e^x$ sont des fonctions croissantes sur $]0, +\infty[$ et $\mathbb{R}$ respectivement, la composition f_1 est croissante sur $]0, +\infty[$, et on a $f_1(t) \leq \lim_{t\to+\infty} f_1(t) = 1$ pour tout $t > 0$. Comme f_1 est continue en 0. On a aussi $f_1(0) \leq 1$. Cela montre que $f_1(t) \leq 1$ pour tout $t \geq 0$. Il est évident que $f_1(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$ **(0,5 pt)**.

Rappelons que $-x \leq \sin(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$. En effet, le Théoreme des accroissements finis pour la fonction sin sur $[0, x]$, avec $x > 0$, dit qu'il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$\frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \cos(c).$$

Du coup, $\sin(x) = x\cos(c)$. Comme $|\cos(c)| \leq 1$, on en déduit que $|\sin(x)| \leq |x|$. Comme $x > 0$, on obtient $-x \leq \sin(x) \leq x$ pour tout $x > 0$. Comme ces inégalités sont trivialement vérifiées lorsque $x = 0$, on a bien $-x \leq \sin(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

En substituant $x = \sqrt{t}$, on en déduit que $-\sqrt{t} \leq \sin(\sqrt{t}) \leq \sqrt{t}$ pour tout $t > 0$. En divisant par $\sqrt{t}$, on obtient $-1 \leq f_2(t) \leq 1$ pour tout $t > 0$. Comme f_2 est continue en 0, ces deux inégalités restent valables pour $t = 0$ **(0,5 pt)**.

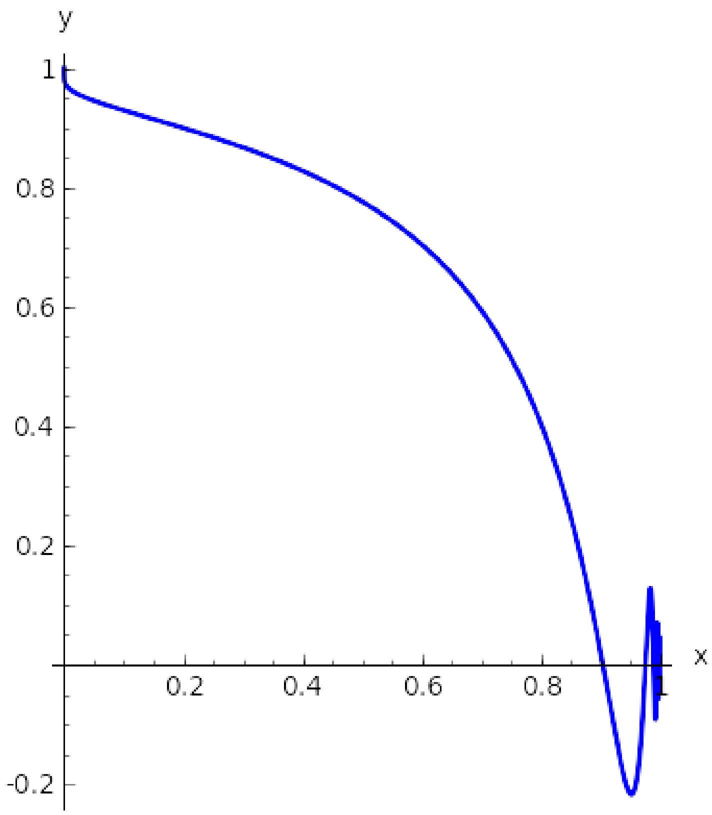

FIGURE 1 – La courbe image de f dans $\mathbb{R}^2$.

d. On a

$$||f(t)-f(0)||^2 = f_1(t)^2 + (f_2(t)-1)^2 \leq 1^2 + (-2)^2 = 5,$$

d'après le c. Du coup, $||f(t)-f(0)|| \leq \sqrt{5}$ pour tout $t \geq 0$ **(0,5 pt)**.

e. D'après le cours, la fonction f est dérivable si et seulement si les fonctions f_1 et f_2 le sont, et dans ce cas $f' = (f_1', f_2')$ **(0,5 pt)**.

Comme dans le a, en remplaçant "continue" par "dérivable", les fonctions f_1 et f_2 sont dérivables sur $]0,+\infty[$. De plus, sur cet ensemble on a

$$f_1'(t) = \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} \quad \textbf{(0,5 pt)},$$

et

$$f_2'(t) = \frac{\sqrt{t}\cos(\sqrt{t}) - \sin(\sqrt{t})}{2t\sqrt{t}} \quad \textbf{(0,5 pt)}.$$

Comme $\lim_{t\downarrow 0} f_1'(t) = 0$, la fonction f_1 est dérivable en 0 et $f_1'(0) = 0$ **(0,5 pt)**. La limite $\lim_{t\downarrow 0} f_2'(t)$ se calcule facilement à l'aide de la règle de l'Hopital par exemple :

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{\sqrt{t}\cos(\sqrt{t}) - \sin(\sqrt{t})}{2t\sqrt{t}} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{2x^3} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{-x\sin(x)}{6x^2} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{-\sin(x)}{6x} = -\tfrac{1}{6}.$$

Du coup, f_2 est dérivable en 0 et $f_2'(0) = -\frac{1}{6}$ **(0,5 pt)**.

f. L'inégalité des accroissements finis dit que

$$||f(t) - f(0)|| \leq t \sup_{c \in]0,t[} ||f'(c)|| \quad \textbf{(0,5 pt)}.$$

g. D'après le e, $f_1'(t) = e^{-1/t}/t^2$ pour $t > 0$. Remarquons que $f_1'(t) \geq 0$ et que $f_1'(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0 ou vers $+\infty$. A partir de là il est facile de voir que f_1' prend sa valeur maximale en un point $p \in]0, +\infty[$ **(0,5 pt)**. Comme f_1' est dérivable sur $]0, +\infty[$, on a forcément $f_1''(p) = 0$. Or,

$$f_1''(t) = \frac{1-2t}{t^4} e^{-\frac{1}{t}}.$$

Il s'ensuit que $p = \frac{1}{2}$ et que $f_1'(t) \leq f_1'(\frac{1}{2}) = 4/e^2$ pour tout $t \in [0, +\infty[$ (voir Figure 2) **(0,5 pt)**.

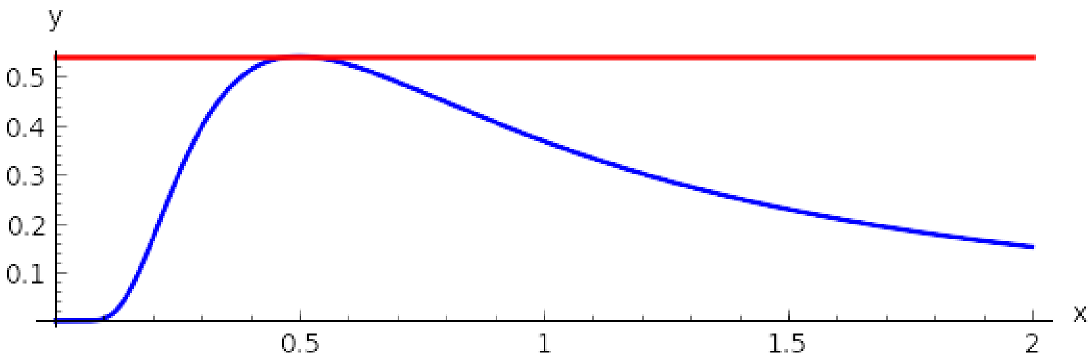

FIGURE 2 – Le graphe de la fonction f_1' et sa valeur maximale $4/e^2$.

h. On utilise que $-\frac{1}{3}x^3 \leq x\cos(x) - \sin(x) \leq \frac{1}{3}x^3$ pour tout $x \geq 0$. Ces inégalités se démontrent facilement à partir des inégalités $-x \leq \sin(x) \leq x$ qu'on a rappelées ci-dessus. Par exemple, comme $\sin(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$, on a $-x \leq -\sin(x)$, ou encore $-x^2 \leq -x\sin(x)$ pour tout $x \geq 0$. On en déduit que

$$-\tfrac{1}{3}x^3 = \int_0^x -t^2\,dt \leq \int_0^x -t\sin(t)\,dt = [t\cos(t) - \sin(t)]_0^x = x\cos(x) - \sin(x)$$

pour tout $x \geq 0$. L'autre inégalité se montre de la même manière.

En substituant $x = \sqrt{t}$, on obtient

$$-\tfrac{1}{3}t\sqrt{t} \leq \sqrt{t}\cos(\sqrt{t}) - \sin(\sqrt{t}) \leq \tfrac{1}{3}t\sqrt{t}$$

pour tout $t \geq 0$. Du coup, en divisant par $2t\sqrt{t}$ pour $t > 0$, on a

$$-\tfrac{1}{6} \leq \frac{\sqrt{t}\cos(\sqrt{t}) - \sin(\sqrt{t})}{2t\sqrt{t}} \leq \tfrac{1}{6},$$

i.e., $|f_2'(t)| \leq \frac{1}{6}$ pour tout $t > 0$ **(0,5 pt)**. Comme f_2' est continue en 0, cette inégalité est aussi valable pour $t = 0$ (voir Figure 3) **(0,5 pt)**.

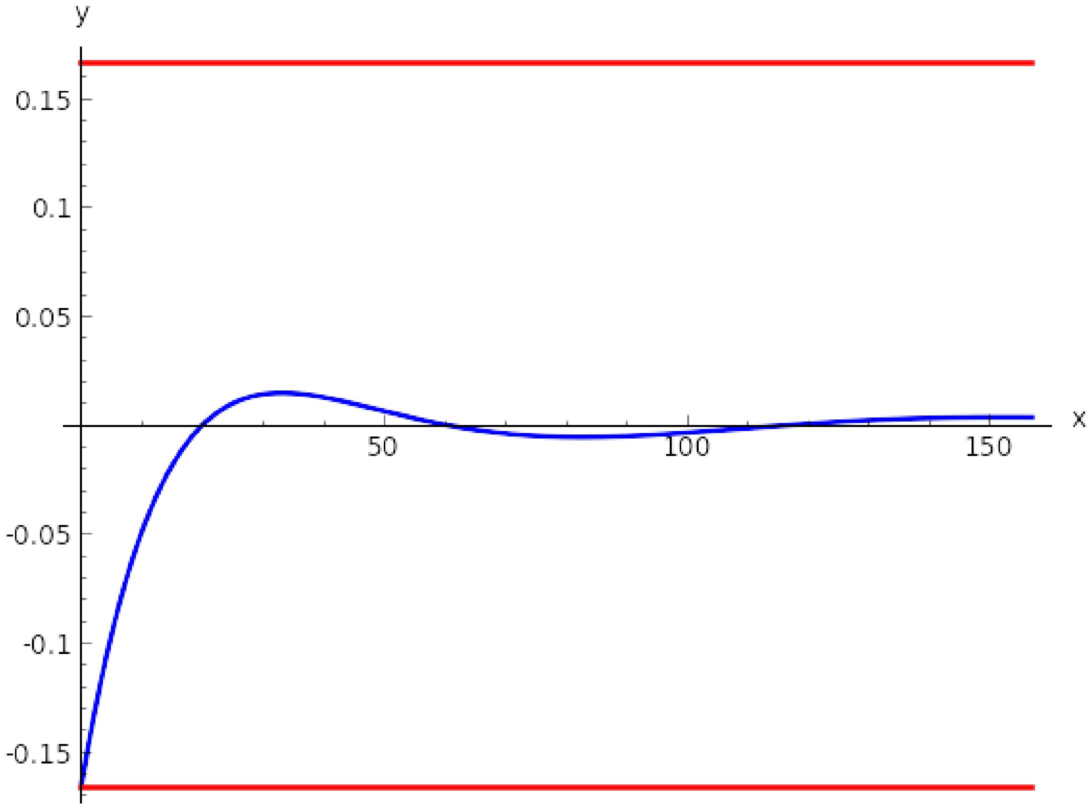

FIGURE 3 – Le graphe de la fonction f_2' et ses bornes $\pm\frac{1}{6}$.

i. D'après les g et h, on a

$$||f'(c)|| = \sqrt{f_1'(c)^2 + f_2'(c)^2} \leq \sqrt{\frac{16}{e^4} + \frac{1}{36}}$$

pour tout $c \geq 0$. Donc, d'après le f, on a

$$||f(t) - f(0)|| \leq t \sup_{c \in]0,t[} ||f'(c)|| \leq t\sqrt{\frac{16}{e^4} + \frac{1}{36}}$$

pour tout $t \geq 0$ **(0,5 pt)**.