Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE DE MATHEMATIQUES

ANALYSE DANS $\mathbb{R}^n$

Contrôle continu, le 30 avril 2015, 10h15-10h45

CORRIGE et BAREME

Exercice 1. a. **(4 pts)** On a $||(x,y,z)||' = 2|x| + 3\max\{|y|,|z|\} \geq 2\times 0 + 3\max\{0,0\} = 0$. D'où $||(x,y,z)||' \geq 0$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Si $||(x,y,z)||' = 0$, alors $2|x| + 3\max\{|y|,|z|\} = 0$. Comme les deux termes sont positifs, on en déduit qu'ils sont nuls tous les deux, i.e., $2|x| = 0$ et $\max\{|y|,|z|\} = 0$. La première égalité implique que $x = 0$. La deuxième égalité implique que $|y| \leq \max\{|y|,|z|\} = 0$ et $|z| \leq \max\{|y|,|z|\} = 0$, i.e., $y = z = 0$. On obtient finalement $(x,y,z) = 0$. Cela montre que $||(x,y,z)||' = 0$ seulement si $(x,y,z) = 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$||\lambda(x,y,z)||' = ||(\lambda x, \lambda y, \lambda z)||' = 2|\lambda x| + 3\max\{|\lambda y|, |\lambda z|\} = 2|\lambda|\cdot|x| + 3\max\{|\lambda|\cdot|y|, |\lambda|\cdot|z|\}.$$

Or, $|\lambda| \geq 0$ donc l'application de multiplication-par-$|\lambda|$ est croissante. Il s'ensuit que

$$\max\{|\lambda|\cdot|y|, |\lambda|\cdot|z|\} = |\lambda|\max\{|y|,|z|\}.$$

Du coup, $||\lambda(x,y,z)||' = |\lambda|\cdot||(x,y,z)||'$.

Soient $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$. On a

$$||(x,y,z) + (x',y',z')||' = ||(x+x', y+y', z+z')||' = 2|x+x'| + 3\max\{|y+y'|, |z+z'|\} \leq 2(|x|+|x'|) + 3\max\{|y|+|y'|, |z|+|z'|\}.$$

Notons que $|y| + |y'| \leq \max\{|y|,|z|\} + \max\{|y'|,|z'|\}$, et de même $|z| + |z'| \leq \max\{|y|,|z|\} + \max\{|y'|,|z'|\}$. Du coup,

$$\max\{|y|+|y'|, |z|+|z'|\} \leq \max\{|y|,|z|\} + \max\{|y'|,|z'|\},$$

et on obtient

$$||(x,y,z) + (x',y',z')||' \leq 2(|x|+|x'|) + 3(\max\{|y|,|z|\} + \max\{|y'|,|z'|\}) = ||(x,y,z)||' + ||(x',y',z')||'.$$

Cela montre bien que $||\cdot||'$ est une norme sur $\mathbb{R}^3$.

b. **(2 pts)** Deux normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, pour tout entier naturel n.

c. **(4 pts)** Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On utilise l'inégalité

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

et de même pour $|y|$ et $|z|$. On a donc

$$\begin{aligned}
&||(x, y, z)||' = 2|x| + 3\max\{|y|, |z|\} \leq \\
&\quad 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + 3\max\{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\} = \\
&\qquad 5\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 5||(x, y, z)||.
\end{aligned}$$

On peut donc prendre $M = 5$.

Quant à m, on utilise cette fois-ci l'inégalité

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq |x| + |y| + |z|$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}
&||(x, y, z)|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq |x|+|y|+|z| \leq 2|x|+\max\{|y|, |z|\}+\max\{|y|, |z|\} = \\
&\quad 2|x| + 2\max\{|y|, |z|\} \leq 2|x| + 3\max\{|y|, |z|\} = ||(x, y, z)||'.
\end{aligned}$$

On peut donc prendre $m = 1$.