

Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE DE MATHÉMATIQUES

ARITHMÉTIQUE ET APPLICATIONS,
COMBINATOIRE ET GRAPHES

Contrôle continu, le 10 février 2014, 9h00–9h30

Documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1. Soit a_n le nombre de façons d'écrire l'entier naturel n comme somme de termes égaux à 1, 2 ou 3. Soit $F \in \mathbb{C}[[X]]$ la série génératrice de la suite (a_n) .

- Écrire F comme produit de 3 séries non triviales dans $\mathbb{C}[[X]]$.
- Montrer que F est une fraction rationnelle dans $\mathbb{C}(X)$.

On admettra la décomposition en éléments simples

$$F = \frac{-\frac{1}{9}j}{X-j} + \frac{\frac{1}{9}j + \frac{1}{9}}{X-j^2} + \frac{\frac{1}{8}}{X+1} + \frac{-\frac{17}{72}}{X-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(X-1)^2} + \frac{-\frac{1}{6}}{(X-1)^3}$$

de F dans $\mathbb{C}(X)$, où $j = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$.

- Écrire chaque terme de cette décomposition sous forme de série formelle dans $\mathbb{C}[[X]]$.
- Déterminer une formule close pour a_n .
- Que vaut a_{40} ?