Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE DE MATHEMATIQUES

ARITHMETIQUE ET APPLICATIONS, COMBINATOIRE ET GRAPHES

Contrôle continu, le 10 mars 2014, 9h00–9h30

CORRIGE ET BAREME

Question de cours. (2 pts) Un graphe est biparti si et seulement si tous ses cycles sont de longueur paire.

Exercice 1. (3 pts) Montrons que le graphe K_n n'est pas biparti en mettant en évidence un cycle de longueur impaire. Les sommets de K_n sont $0, \dots, n-1$. Comme $n \geq 3$, le graphe K_n possède notamment les sommets 0, 1 et 2. Comme K_n est un graphe complet, il contient les arêtes $\{0,1\}$, $\{1,2\}$ et $\{2,0\}$. Le graphe K_n contient donc le cycle $(0,1,2,0)$ qui est de longueur 3. Le graphe K_n possède donc un cycle de longueur impaire, et n'est pas biparti.

Exercice 2. (5 pts) a. Par définition de G, son ensemble de sommets V est égal à S_4. On a donc $|V| = |S_4| = 4! = 24$. **(1 pt)**

b. Soit σ un sommet de G. Soit N l'ensemble des voisins de σ. Soit T l'ensemble des transpositions de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$. Soit $f\colon T \to N$ l'application définie par $f(\tau) = \tau\sigma$. D'après la définition, $f(T) = N$, et f est donc surjective. Montrons que f est injective. Supposons que $f(\tau) = f(\tau')$ pour $\tau, \tau' \in T$. On a donc $\tau\sigma = \tau'\sigma$. En multipliant à droite par σ^{-1} on obtient $\tau = \tau'$. L'application f est donc injective. Comme f est injective et surjective, f est bijective. En particulier $|T| = |N|$. Comme $T = 6$, on a $N = 6$, i.e., tout sommet de G possède exactement 6 voisins, et G est 6-régulier. **(1 pt)**

c. D'après le b, on a $\deg(\sigma) = 6$ pour tout sommet σ de G. D'après le cours, le nombre d'arêtes $\varepsilon(G)$ de G satisfait

$$2\varepsilon(G) = \sum_{\sigma \in V} \deg(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_4} 6 = 24 \times 6.$$

Du coup, $\varepsilon(G) = 24 \times 6/2 = 72$. **(1 pt)**

d. Oui. Soit σ un sommet quelconque de G. Montrons qu'il y a un chemin dans G qui relie le sommet id de G à σ. On sait que S_4 est engendré par les transpositions. On peut donc écrire $\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_n$, pour un certain entier naturel n. On a alors le chemin suivant dans G :

$$(\mathrm{id}, \tau_n\mathrm{id}, \tau_{n-1}\tau_n\mathrm{id}, \dots, \tau_1\tau_2\cdots\tau_{n-1}\tau_n\mathrm{id})$$

qui relie effectivement id à σ. Le graphe G est donc connexe. **(1 pt)**

e. Soit $X = A_n$, l'ensemble des permutations paires dans S_4, i.e., l'ensemble des permutations σ de signature $+1$. Soit $Y = S_4 \setminus X$. On a évidemment $X \cup Y = S_4$ et $X \cap Y = \emptyset$. Vérifions qu'une arête e de G possède un extrémité en X et un en Y. En effet, si $\{\sigma, \sigma'\}$ est une arête de G, il existe une transposition τ telle que $\sigma' = \tau\sigma$. En prenant la signature on obtient $\mathrm{sign}(\sigma') = \mathrm{sign}(\tau)\mathrm{sign}(\sigma)$. Comme toute transposition est de signature -1, les permutations σ et σ' sont de signatures opposées. Il s'ensuite que l'une appartient à X et l'autre à Y. Le graphe G est donc bien biparti. **(1 pt)**