UFR Mathématiques, Université de Rennes 1
Licence de Mathématiques

ALGEBRE ET APPLICATIONS GEOMETRIQUES

Contrôle continu, le 18 octobre 2002

CORRIGE et EXPLICATIONS

1. Faux. Il n'y a pas d'élément neutre: supposons qu'il existe un élément neutre $e \in \mathbb{R}$. On a, en particulier, $-1 = -1 \star e = \sqrt{(-1)^2 + e^2} \geq 0$, ce qui est absurde.

2. Vrai. Comme E est un ensemble fini, toute surjection de E dans lui-même est une bijection. Par conséquent, A est égal à l'ensemble $S(E)$ des bijections de E dans lui-même. D'après le cours, $(S(E), \circ)$ est un groupe.

3. Vrai. Soit σ la transposition $1 \mapsto 2$ et $2 \mapsto 1$, et soit τ la permutation cyclique $3 \mapsto 4, 4 \mapsto 5$ et $5 \mapsto 3$. La permutation $\sigma \circ \tau$ est d'ordre 6. On peut voir ca soit directement, soit en utilisant l'exo 10e de la 1ère feuille d'exercices.

4. Faux. L'application f de S_3 dans lui-même définie par $f(x) = x^{-1}$ est injective. Comme $f \circ f = \mathrm{id}$, $f \circ f$ est un morphisme. Par contre, f n'en est pas un d'après l'exo 2b de la 1ère feuille d'exercices.

5. Vrai. Supposons que f est un morphisme de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$. Comme $\mathrm{im}(f)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{im}(f) = n\mathbb{Z}$. Soit $x \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x) = n$. Comme $2f(\frac{1}{2}x) = f(x) = n$, il existe $m \in \mathrm{im}(f)$ tel que $2m = n$. Comme $\mathrm{im}(f) = n\mathbb{Z}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m = kn$. D'où $n = 2m = 2kn$, i.e., $(2k-1)n = 0$. Mais $2k-1 \neq 0$ puisque $k \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, $n = 0$ et $\mathrm{im}(f) = \{0\}$, i.e., f est trivial.

6. Faux. Soit $G = S_3$. Soit τ la transposition $1 \mapsto 2$ et $2 \mapsto 1$, et soit τ' la transposition $2 \mapsto 3$ et $3 \mapsto 2$. Soient $H = \{\mathrm{id}, \tau\}$ et $H' = \{\mathrm{id}, \tau'\}$. Il est clair que H et H' sont des sous-groupes de S_3. Par contre, f n'est pas un morphisme car

$$f((\mathrm{id}, \tau') \cdot (\tau, \mathrm{id})) = f(\tau, \tau') = \tau \circ \tau' \neq \tau' \circ \tau = f(\mathrm{id}, \tau') \cdot f(\tau, \mathrm{id}).$$

7. Vrai. Soit $f \colon \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ l'application définie par $f(n) = 2n$. Il est clair que f est un morphisme bijectif. Par conséquent, f est un isomorphisme et $\mathbb{Z}$ et $2\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

8. Faux. Prendre $n = 2$. Soit U le sous-ensemble de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures, et soit L le sous-ensemble de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires inférieures. Comme U et L sont des sous-groupes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, la réunion $S = U \cup L$ n'est pas un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ d'après l'exo 7b de la 1ère feuille d'exercices.

9. Vrai. On a $I_n v = 1 \cdot v$ donc $I_n \in S$. Si $A, B \in S$, on a $Av = \lambda v$ et $Bv = \mu v$ pour certains $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $ABv = A\mu v = \mu Av = \mu\lambda v$. D'où $AB \in S$. De plus, en multipliant l'équation $Av = \lambda v$ à gauche par A^{-1}, on obtient $v = A^{-1}\lambda v = \lambda A^{-1} v$ Comme A est inversible, $\lambda \neq 0$. D'où $A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$ et $A^{-1} \in S$.

10. Faux. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$(AB)^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, le sous-groupe engendré par A et B est infini.