UFR Mathématiques, Université de Rennes 1
Licence de Mathématiques

ALGEBRE ET APPLICATIONS GEOMETRIQUES

Contrôle continu, le 6 décembre 2002

CORRIGE et EXPLICATIONS

1. Faux. Prendre $n = 3$, $\sigma = (1, 2) \in S_3$ et $i = 3$. Alors $\sigma(i) = i$ mais $\sigma \neq \mathrm{id}$. Donc, le stabilisateur $(S_3)_3 \neq \{\mathrm{id}\}$. Par conséquent, l'action de S_3 sur $\{1, 2, 3\}$ n'est pas libre.

2. Vrai. Si $x \in E$, on a $|Gx| \cdot |G_x| = |G|$. D'où $|Gx|$ est fini et divise $|G|$.

3. Faux. Soit G le sous-groupe de S_{21} engendré par le 11-cycle $\sigma = (1, \dots , 11)$. On a bien $|G| = 11$. Le groupe G agit naturellement sur $\{1, \dots , 21\}$. Cette action n'est pas triviale car $\sigma(1) = 2 \neq 1$.

4. Faux. Comme les cycles $(1, 5)$ et $(2, 4, 3)$ sont à support disjoint, ils commutent entre eux et engendrent donc un sous-groupe G de S_5 de cardinal $2 \times 3 = 6$. D'après le 2, toute orbite de $\{1, \dots , 5\}^2$ a un cardinal divisant 6. Comme 5 ne divise pas 6, l'ensemble $\{1, \dots , 5\}^2$ ne contient pas d'orbite de cardinal 5.

5. Vrai. La seule solution de $11x + 17y = 39$ dans $\mathbb{N}^2$ est $(x, y) = (2, 1)$. Donc E contient exactement $2 + 1 = 3$ orbites.

6. Vrai. C'est évident. D'ailleurs, on peut remarquer que seul $H = G$ satisfait l'hypothèse, et que G est trivialement distingué dans G.

7. Faux. Prendre $G = S_3$ et $N = \{\mathrm{id}\}$. Le sous-groupe N est bien distingué dans G et d'indice 6. Mais le quotient G/N est isomorphe à S_3. Donc, G/N n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

8. Faux. Prendre $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $N = \{\overline{0}\}$. le sous-groupe N est bien distingué dans G. Soient $x = \overline{1}$ et $y = \overline{0}$. On a bien $3y, 2(x + y), x + y - x - y \in N$, mais $x \notin N$.

9. Faux. Le groupe S_3 n'est pas commutatif, mais $[S_3, S_3] = A_3 \neq S_3$.

10. Vrai. On vérifie facilement que H est un sous-groupe distingué de G.