UFR Mathématiques, Université de Rennes 1

Licence de Mathématiques

ALGEBRE ET APPLICATIONS GEOMETRIQUES

Examen terminal, 28 mai 2002, 14h-17h

Documents et calculatrices sont interdits. On pourra utiliser tous les résultats du cours, du polycopié et des TD.

1. Soit G un groupe d'ordre 143 qui agit à gauche sur un ensemble E de cardinal 142 sans point fixe. Déterminer le nombre d'orbites de E.

2. a. Déterminer le nombre de morphismes du groupe diédral D_{13} dans le groupe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

b. Déterminer le nombre de morphismes de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ dans le groupe D_{13}.

3. Soit G un groupe d'ordre 2002. On suppose que le nombre de 7-sous-groupes de Sylow de G n'est pas égal à 22.

a. Montrer que G contient un sous-groupe distingué K d'ordre 77.

b. Montrer que K est isomorphe à $\mathbb{Z}/77\mathbb{Z}$.

c. Montrer que G contient un sous-groupe distingué H d'ordre 1001.

d. Montrer que H est isomorphe à $\mathbb{Z}/1001\mathbb{Z}$.

e. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/2002\mathbb{Z}$ ou D_{1001}.

4. Soit $i\colon H \to G$ un morphisme de groupe injectif. Supposons qu'il existe un morphisme $p\colon G \to H$ tel que $p \circ i = \mathrm{id}_H$. Soit $N = \ker(p)$. Montrer que G est isomorphe à un produit semi-direct de N et H.