UFR Mathématiques, Université de Rennes 1
Licence de Mathématiques

ALGEBRE ET APPLICATIONS GEOMETRIQUES

Contrôle continu, le 18 octobre 2002, 12h–12h15

Ce contrôle est noté sur 5 points. Chaque bonne réponse vaut $\frac{1}{2}$ point, chaque mauvaise réponse vaut $-\frac{1}{2}$ point. Une non-réponse n'est pas comptabilisée. La note du controle est égale à la somme des points obtenus, avec un minimum de 0. Aucune justification de réponse n'est demandée. Répondre directement sur la feuille après chaque question. Aucun document n'est autorisé. N'oubliez pas d'inscrire votre nom et groupe de TD.

Nom:

TD:

Répondez par "vrai" ou par "faux":

1. La loi de composition interne $\star$ sur $\mathbb{R}$ définie par $x \star y = \sqrt{x^2+y^2}$ est une loi de groupe sur $\mathbb{R}$.

2. Soit E un ensemble fini et soit A l'ensemble des applications surjectives de E dans lui-même. La composition d'applications est une loi de groupe sur A.

3. Le groupe symétrique S_5 contient un élément d'ordre 6.

4. Soit G un groupe et soit $f\colon G \to G$ une application injective. L'application f est un morphisme de groupe si $f \circ f$ en est un.

5. Le seul morphisme de groupes de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$ est le morphisme trivial.

6. Soient H et H' deux sous-groupes d'un groupe G. Soit f l'application

$$f\colon H \times H' \longrightarrow G$$

définie par $f(x,x') = xx'$ quel que soit $(x,x') \in H \times H'$. L'application f est un morphisme de groupes.

7. Les groupes $\mathbb{Z}$ et $2\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit S le sous-ensemble de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices qui sont triangulaires supérieures ou inférieures. Le sous-ensemble S est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, et $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Soit S le sous-ensemble de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices A qui ont v comme vecteur propre. Le sous-ensemble S de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe.

10. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

deux éléments du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. Le sous-groupe engendré par A et B est fini.