Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
Département de Mathématiques
MASTER 1, MATHEMATIQUES

ALGEBRE

Examen terminal, 3 janvier 2005, 13h00–17h00

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Soit A un anneau noethérien. Montrer que $A[X]$ est noethérien. (On pourra admettre qu'un anneau est noethérien si et seulement si toute chaîne croissante de ses idéaux est stationnaire.)

Exercice 1. Soit G un groupe non commutatif de cardinal 2005.

a. Déterminer le nombre de 5-sous-groupes de Sylow de G.

b. Déterminer le nombre d'éléments de G d'ordre 5.

Exercice 2. Soient N et H des groupes, et $\alpha\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ un morphisme de groupes. Soit H' un sous-groupe distingué de H, contenu dans le noyau de α. Soit $\overline{\alpha}\colon H/H' \to \mathrm{Aut}(N)$ le morphisme induit.

a. Montrer que $\{1\} \times H'$ est un sous-groupe distingué du produit semi-direct $N \rtimes_\alpha H$.

b. Montrer que le quotient $(N \rtimes_\alpha H)/(\{1\} \times H')$ est isomorphe au produit semi-direct $N \rtimes_{\overline{\alpha}} (H/H')$.

Exercice 3. Soit A un anneau intègre, et soient M et N deux A-modules de type fini. Supposons qu'il existe un morphisme de A-modules injectif $f\colon M \to N$. Montrer que $\mathrm{rang}(M) \leq \mathrm{rang}(N)$.

Exercice 4. Soit $f\colon \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^2$ le morphisme de $\mathbb{Z}$-modules dont la matrice dans les bases canoniques est la matrice

$$\begin{pmatrix} 8 & 12 & 16 \\ 28 & 32 & 50 \end{pmatrix}.$$

Déterminer des entiers relatifs d, e, avec $d|e$, tels que le conoyau de f est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$.

Exercice 5. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

a. Montrer que $[K : \mathbb{Q}] = 4$.

b. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = K$.

c. Déterminer le polynôme minimal P de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sur $\mathbb{Q}$.

T. S. V. P.

d. Montrer que l'extension $K/\mathbb{Q}$ est galoisienne et que son groupe de Galois est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

e. Soit α la racine carrée positive de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Montrer que $\alpha \notin K$.

f. Déterminer le polynôme minimal Q de α sur $\mathbb{Q}$.

g. Soit $L \subseteq \mathbb{C}$ le corps de décomposition de Q sur $\mathbb{Q}$. Montrer que $L = \mathbb{Q}(\alpha, i)$ et que $[L : \mathbb{Q}] = 16$.

h. Montrer que le groupe de Galois de $L/\mathbb{Q}(i)$ est isomorphe au groupe diédral D_4.

i. Montrer que le groupe de Galois de $L/\mathbb{Q}$ est isomorphe à un produit semi-direct non trivial $D_4 \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Barème indicatif sur 100 points :

Question de cours	20 pts
Exercice 1	15 pts
Exercice 2	12 pts
Exercice 3	8 pts
Exercice 4	15 pts
Exercice 5	30 pts

T. S. V. P.