

Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
Département de Mathématiques
MASTER 1, MATHÉMATIQUES

ALGÈBRE

Examen terminal, 9 janvier 2006, 13h30–17h30

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Énoncer le théorème de classification des modules de type fini sur un anneau principal.

Exercice 1. Déterminer tous les groupes abéliens de cardinal 2006^2 à isomorphisme près. Combien y en a-t-il ?

Exercice 2. Soit G un groupe abélien de cardinal impair. Montrer que tout morphisme du groupe symétrique S_5 dans G est trivial.

Exercice 3. Soient $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{Z}^2$ définis par

$$v_1 = (24, 36), \quad v_2 = (32, 54), \quad v_3 = (16, 18)$$

Soit A le sous-groupe de \mathbb{Z}^2 engendré par v_1, v_2, v_3 .

- Déterminer une base de A .
- Déterminer les diviseurs élémentaires du quotient \mathbb{Z}^2/A .

Exercice 4. Soit G un groupe de cardinal 42.

- Montrer que G ne contient qu'un seul 7-sous-groupe de Sylow.
- Montrer que G contient un sous-groupe N de cardinal 21.
- Montrer que N est un sous-groupe distingué de G .
- Montrer que tout sous-groupe de G de cardinal 21 est un conjugué de N .
- Montrer que N est le seul sous-groupe de G de cardinal 21.

Exercice 5. Soit A un anneau non nul et soient M et N des A -modules libres de rang fini. Soit $f: M \rightarrow N$ un morphisme de A -modules. Montrer que $\text{rang}(M) \geq \text{rang}(N)$ lorsque f est surjectif.

Exercice 6. Soit $P = X^4 - 2X^2 - 5 \in \mathbb{Q}[X]$.

- Montrer que P se décompose dans $\mathbb{Q}(\sqrt{6})[X]$ comme produit de deux polynômes irréductibles de degré 2.

T. S. V. P.

- b. Montrer que le corps de décomposition K de P sur \mathbb{Q} est de degré 8 sur \mathbb{Q} .
- c. Montrer que le groupe de Galois G de P sur \mathbb{Q} est isomorphe au groupe diédral D_4
- d. Déterminer tous les sous-corps de K de degré 4 sur \mathbb{Q} .

Barème indicatif sur 100 points :

| | |
|-------------------|--------|
| Question de cours | 20 pts |
| Exercice 1 | 10 pts |
| Exercice 2 | 10 pts |
| Exercice 3 | 10 pts |
| Exercice 4 | 12 pts |
| Exercice 5 | 8 pts |
| Exercice 6 | 30 pts |

T. S. V. P.