Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
Département de Mathématiques
MASTER 1, MATHEMATIQUES

ALGEBRE

Examen terminal, 16 juin 2006, 8h30–12h30

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Soit p un nombre premier. Enoncer le théorème de classification des p-groupes abéliens finis.

Exercice 1.

a. Montrer qu'un groupe de cardinal 1003 est cyclique.

b. Montrer qu'un groupe de cardinal 2006 contient un sous-groupe cyclique de cardinal 1003.

c. Un groupe de cardinal 2006 est-il nécessairement cyclique ? Si oui, le montrer. Si non, donner un contre-exemple.

Exercice 2.

a. Soient k, ℓ des entiers non nuls. Montrer que les diviseurs élémentaires du groupe fini $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ sont $\operatorname{ppcm}(k,\ell), \operatorname{pgcd}(k,\ell)$.

b. Soient k, ℓ, m des entiers non nuls. Quels sont les diviseurs élémentaires de $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$? Le montrer.

Exercice 3. Soit A l'anneau $\mathbb{Q}[X]/(X^2-1)$, soit $f\colon A \to \mathbb{Q}$ le morphisme d'anneaux défini par $f(\overline{P}) = P(1)$ pour tout $\overline{P} \in A$, et soit S le sous-ensemble de A défini par

$$S = \{(\overline{X+1})^i \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

a. Montrer que S est une partie multiplicative de A.

b. Montrer que

$$\frac{\overline{X-1}}{1} = \frac{0}{1}$$

dans la localisation $S^{-1}A$.

c. Montrer que f induit un morphisme d'anneaux $g\colon S^{-1}A \to \mathbb{Q}$.

d. Montrer que g est un isomorphisme.

Exercice 4. Soit A un anneau et soit I un idéal de A. Rappelons que

$$I^2 = \{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \mid a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in I \text{ et } n \in \mathbb{N}\}.$$

a. Montrer que I^2 est un idéal de A contenu dans I.

T. S. V. P.

b. Montrer que le A-module I/I^2 admet une structure naturelle de A/I-module.

Dans la suite, soit $A = \mathbb{Q}[X,Y]$ et soit I l'idéal de A engendré par X, Y. Le but du reste de cet exercice est de montrer que l'idéal I n'est pas principal.

c. Montrer que A/I est isomorphe à $\mathbb{Q}$.

d. Montrer que $I^2 = (X^2, XY, Y^2)$.

e. Montrer que la dimension de I/I^2 comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel est égale à 2.

f. Montrer que la dimension de I/I^2 comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel serait inférieure à 1 si I était un idéal principal.

Exercice 5. Soit M le sous-$\mathbb{Q}[X]$-module de $\mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[X]$ engendré par

$$(X-4, 2),\ (-3, X+1).$$

Soit $\pi\colon \mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]$ la projection sur le premier facteur.

a. Déterminer un générateur de $\mathrm{im}(\pi_{|M})$.

b. Déterminer un générateur de $\ker(\pi_{|M})$.

c. Montrer que le $\mathbb{Q}[X]$-module quotient $(\mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[X])/M$ est de torsion.

d. Déterminer les diviseurs élémentaires de $(\mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[X])/M$ en tant que $\mathbb{Q}[X]$-module.

Exercice 6. Soient $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$ et $L = K(i)$.

a. Déterminer $[K : \mathbb{Q}]$.

b. Déterminer $[L : \mathbb{Q}]$.

c. Montrer que l'extension $L/\mathbb{Q}$ est galoisienne.

d. Montrer que L/K est galoisienne et déterminer son groupe de Galois.

e. Montrer que $L/\mathbb{Q}(i)$ est galoisienne et déterminer son groupe de Galois.

f. Déterminer le groupe de Galois de $L/\mathbb{Q}$.

Barème indicatif sur 100 points :

Question de cours	20 pts
Exercice 1	15 pts
Exercice 2	10 pts
Exercice 3	10 pts
Exercice 4	15 pts
Exercice 5	10 pts
Exercice 6	20 pts

T. S. V. P.