Université de Bretagne Occidentale, Département de Mathématiques

MASTER 1, MATHEMATIQUES

Groupes et anneaux

Examen terminal 2nd session, 13 juin 2013, 9h00–12h00

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Soit p un nombre premier. Montrer que le centre d'un p-groupe non trivial est non trivial.

Exercice 1. Soit G un groupe. Rappelons qu'un commutateur de G est un élément de G de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$, noté $[x, y]$, où $x, y \in G$. Le sous-groupe des commutateurs de G est le sous-groupe de G engendré par les commutateurs de G, et est noté $[G, G]$. Soit H un sous-groupe distingué de G.

a. Montrer que $[G, G] \subseteq H$ si G/H est abélien.

Soit G le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{F}_2$ et inversibles. Soit

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

b. Montrer que H est un sous-groupe de G.

c. Montrer que H est distingué dans G.

d. Montrer que G/H est abélien.

e. Montrer que $[G, G] = H$.

Exercice 2. Soit G un groupe de cardinal 665.

a. Déterminer le nombre de p-sous-groupes de Sylow de G, pour tout nombre premier p divisant 665.

b. Montrer que G est cyclique.

Exercice 3. Soit $a \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z})$ la matrice définie par

$$a = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 9 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soit H le sous-groupe de $G = \mathbb{Z}^3$ engendré par les colonnes de a.

T. S. V. P.

a. Déterminer des matrices $u \in M_3(\mathbb{Z})$ et $v \in M_3(\mathbb{Z})$, produits de matrices élémentaires, et des entiers relatifs d, e, f, avec $d|e$ et $e|f$, tels que $uav = \operatorname{diag}(d, e, f)$.

b. Déterminer le rang et les facteurs invariants du quotient G/H.

c. Le quotient G/H est-il monogène ?

Exercice 4. Soit A un anneau commutatif unitaire et S une partie multiplicative de A. Définissons le sous-ensemble $\overline{S}$ de A par

$$\overline{S} = \{a \in A \mid \exists b \in A \colon ab \in S\}.$$

a. Montrer que $\overline{S}$ est une partie multiplicative de A.

b. Montrer que $S \subseteq \overline{S}$.

c. Donner un exemple explicite d'un anneau A et d'une partie multiplicative S pour laquelle $S \neq \overline{S}$.

d. Montrer que $\overline{(\overline{S})} = \overline{S}$.

e. Montrer que les localisations $S^{-1}A$ et $(\overline{S})^{-1}A$ sont isomorphes.

f. Montrer que le groupe multiplicatif de $(\overline{S})^{-1}A$ est égal à l'ensemble des éléments de la forme $\frac{r}{s}$ où $r, s \in \overline{S}$.

g. Montrer par un exemple explicite que l'énoncé précédent est faux lorsqu'on remplace $\overline{S}$ par S.

Exercice 5. Soit ξ le nombre complexe $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, et soit

$$A = \{a + b\xi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

a. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

b. Montrer que A est isomorphe à l'anneau quotient $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + X + 1)$.

c. Montrer que le groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ possède une structure de A-module.

d. Soit p un nombre premier $\neq 3$. Montrer que le group $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ possède une structure de A-module si et seulement si $p \equiv 1 \pmod 3$.

e. Montrer que le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède une structure de A-module pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

T. S. V. P.