Introduction à la supersymétrie

Luc Frappat

Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique
CNRS–Université Savoie Mont Blanc
9 chemin de Bellevue, BP 110
F-74941 Annecy-le-Vieux cedex

Cours donné à l'Université de Brest, 5-7 octobre 2015

Table des matières

1. Algèbre de supersymétrie

1.1 Pourquoi la supersymétrie ?

L'importance croissante des symétries internes en physique des particules dans les années 1960 ont conduit naturellement les physiciens à se poser la question de combiner de façon non triviale le groupe de symétrie d'espace-temps de Poincaré et les groupes de symétrie interne de la matrice de diffusion en théorie quantique des champs. Les efforts déployés trouvèrent leur épilogue dans un théorème no-go démontré par Coleman et Mandula en 1967 [1] . Rappelons le résumé de l'article original [1] :

We prove a new theorem on the impossibility of combining space-time and internal symmetries in any but a trivial way. The theorem is an improvement on known results in that it is applicable to infinite-parameter groups, instead of just to Lie groups. This improvement is gained by using information about the S matrix; previous investigations used only information about the single-particle spectrum. We define a symmetry group of the S matrix as a group of unitary operators which turn one-particle states into one-particle states, transform many-particle states as if they were tensor products, and commute with the S matrix. Let G be a connected symmetry group of the S matrix, and let the following five conditions hold : (i) G contains a subgroup locally isomorphic to the Poincaré group. (ii) For any $M > 0$, there are only a finite number of one-particle states with mass less than M. (iii) Elastic scattering amplitudes are analytic functions of s and t [the Mandelstam variables], *in some neighborhood of the physical region. (iv) The S matrix is nontrivial in the sense that any two one-particle momentum eigenstates scatter (into something), except perhaps at isolated values of s. (v) The generators of G, written as integral operators in momentum space, have distributions for their kernels. Then, we show that G is necessarily locally isomorphic to the direct product of an internal symmetry group and the Poincaré group.*

Le théorème de Coleman–Mandula montre donc que l'algèbre de Lie des symétries de la matrice de diffusion S en théorie quantique des champs contient uniquement l'algèbre de Poincaré (générateurs de Lorentz $M_{\mu\nu}$ et générateurs des translations P_μ) et un ensemble fini de générateurs T_A invariants de Lorentz d'une algèbre de Lie $\mathcal{A}$. Les générateurs de l'algèbre de Lie $\mathcal{A}$ agissant sur les états multi-particules par des matrices hermitiennes, l'algèbre $\mathcal{A}$ est la somme directe d'une algèbre semisimple $\mathcal{A}_1$ et d'une algèbre abélienne $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$. On a donc

$$\begin{aligned}
&\left[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}\right] = i(g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} + g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma})\\
&\left[M_{\mu\nu}, P_\rho\right] = i(g_{\nu\rho}P_\mu - g_{\mu\rho}P_\nu)\\
&\left[P_\mu, P_\nu\right] = 0\\
&\left[T_A, T_B\right] = i f_{AB}{}^C T_C\\
&\left[M_{\mu\nu}, T_A\right] = \left[P_\mu, T_A\right] = 0
\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Remarque 1.1
L'hypothèse de non-trivialité de la matrice S est essentielle dans le théorème : on peut trouver des extensions non triviales contenant le groupe de Poincaré et des symétries internes, mais le théorème assure alors que la physique sous-jacente est triviale.

1. Pour une démonstration détaillée du théorème, on pourra consulter par exemple la référence [14], pp. 12–24.

Il revient à Golfand et Likhtman [2] d'avoir montré en 1971 qu'on peut s'affranchir du théorème de Coleman–Mandula à condition d'abandonner la notion d'algèbre de symétrie pour la celle généralisée de superalgèbre de symétrie : on étend l'algèbre formée de l'algèbre de Poincaré et de l'algèbre de symétrie interne par une structure $\mathbb{Z}_2$-graduée

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{B},\mathcal{B}\right] &= \mathcal{B} \\ \left[\mathcal{F},\mathcal{B}\right] &= \mathcal{F} \\ \left\{\mathcal{F},\mathcal{F}\right\} &= \mathcal{B} \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Les générateurs $\mathcal{B}$ sont appelés bosoniques et les générateurs $\mathcal{F}$ fermioniques. Par cohérence, on notera qu'on a les relations de Jacobi généralisées suivantes :

$$\begin{aligned} &\left[\mathcal{B}_1,\left[\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3\right]\right]+\left[\mathcal{B}_2,\left[\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_1\right]\right]+\left[\mathcal{B}_3,\left[\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2\right]\right]=0 \\ &\left[\mathcal{B}_1,\left[\mathcal{B}_2,\mathcal{F}_3\right]\right]+\left[\mathcal{B}_2,\left[\mathcal{F}_3,\mathcal{B}_1\right]\right]+\left[\mathcal{F}_3,\left[\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2\right]\right]=0 \\ &\left[\mathcal{B}_1,\left\{\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3\right\}\right]+\left\{\mathcal{F}_2,\left[\mathcal{F}_3,\mathcal{B}_1\right]\right\}-\left\{\mathcal{F}_3,\left[\mathcal{B}_1,\mathcal{F}_2\right]\right\}=0 \\ &\left[\mathcal{F}_1,\left\{\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3\right\}\right]+\left[\mathcal{F}_2,\left\{\mathcal{F}_3,\mathcal{F}_1\right\}\right]+\left[\mathcal{F}_3,\left\{\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\right\}\right]=0 \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Les relations (1.1.2) montrent que les générateurs bosoniques forment une algèbre de Lie dont les générateurs fermioniques forment une représentation.

Il apparait de façon remarquable que l'extension superalgébrique de l'algèbre de Poincaré et de l'algèbre de symétrie interne est unique, elle est appelée algèbre de supersymétrie (voir section suivante pour sa construction explicite).

En 1975, Haag, Łopuszański et Sohnius montrèrent que les symétries possibles d'une théorie quantique des champs cohérente en dimension 4 incluent l'algèbre de supersymétrie comme extension non triviale de l'algèbre de Poincaré [3]. Un des principaux résultats est que la partie fermionique de la superalgèbre de Lie ne peut contenir que des générateurs de spin $\frac{1}{2}$.

Actuellement, l'algèbre de supersymétrie est devenue un ingrédient essentiel en physique théorique, notamment en physique des hautes énergies.

i. De façon générale, les théories de champs supersymétriques sont beaucoup plus contraintes que les théories non supersymétriques (la symétrie est plus élevée). Certains cas peuvent alors être traités analytiquement ce qui s'avère impossible pour les cas non SUSY. Citons comme exemples la QCD supersymétrique et surtout les théories de Yang–Mills maximallement supersymétriques (SYM $N = 4$) qui font actuellement l'objet d'intenses recherches et qui ont conduit à des résultats remarquables sur les amplitudes de diffusion.

ii. Le Modèle Standard de la physique des particules fournit un cadre théorique bien établi et en excellent accord avec les résultats expérimentaux. Néanmoins, plusieurs aspects du modèle ne sont pas satisfaisant et différents problèmes ne trouvent pas de solution dans son cadre strict : nombre de familles, grand nombre de paramètres libres, problème de la hiérarchie, matière noire, etc.

   Les extensions les plus prometteuses à la fois théoriquement et phénoménologiquement sont supersymétriques. La supersymétrie assure un comportement du Modèle Standard bien meilleur (corrections radiatives bien plus faibles, disparition de divergences ultraviolettes par annulation des anomalies grâce aux compensations entre les boucles de bosons et les boucles de fermions). De nouvelles particules dans le spectre sont de bons candidats à la matière noire ("lightest supersymmetric particle" LSP). La supersymétrie permet en outre de résoudre le problème de hiérarchie entre les échelles de brisure électrofaible (~ 100 GeV) et l'échelle de grande unification

($\sim 10^{15}$ GeV) ou l'échelle de Planck ($\sim 10^{19}$ GeV). Enfin, elle protège la masse des scalaires, notamment du boson de Higgs. Cependant, la supersymétrie n'est pas réalisée de façon exacte dans la nature (cf. plus loin le spectre des théories SUSY !), il est donc nécessaire qu'elle soit brisée de façon spontanée.

iii. La supersymétrie est un ingrédient nécessaire des théories de cordes ; apparition de dualités (correspondances entre régimes de couplage faible et régimes de couplage fort) possible grâce à la supersymétrie. Dans le cas des théories de cordes par ex., correspondance AdS/CFT qui permet de relier les théories de supercordes de type IIB aux théories SYM $N = 4$. Dans sa version locale, la supersymétrie conduit à la supergravité.

iv. Notons que la supersymétrie apparait également dans certaines applications de la physique de la matière condensée.

1.2 L'algèbre de supersymétrie

On considère une superalgèbre (1.1.2) dont les générateurs bosoniques sont les générateurs de l'algèbre de Poincaré P_μ et $M_{\mu\nu}$ ainsi que les générateurs T_A de l'algèbre de symétrie interne, satisfaisant les relations (1.1.1) puisque l'algèbre de Lie formée par les $\mathcal{B}$ doit satisfaire le théorème de Coleman–Mandula. Les générateurs $\mathcal{F}$ sont formés de générateurs Q^I_α et de leurs hermitiques conjugués, appelés *supercharges* (la nature et les valeurs des indices α seront explicitées plus loin et $I = 1, \ldots, N$). Une telle superalgèbre est appelée *algèbre de supersymétrie*. Lorsque $N > 1$, on parle de supersymétrie étendue.

Compte tenu de (1.1.2), on doit avoir pour un générateur bosonique $\mathcal{B}$

$$\left[Q^I_\alpha, \mathcal{B}\right] = b_\alpha^{\ \beta}\, Q^I_\beta \tag{1.2.1}$$

L'identité de Jacobi généralisée sur les générateurs $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et Q^I_α implique

$$\left[Q^I_\alpha, \left[\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\right]\right] = \left[\left[Q^I_\alpha, \mathcal{B}_1\right], \mathcal{B}_2\right] - \left[\left[Q^I_\alpha, \mathcal{B}_2\right], \mathcal{B}_1\right] = \left[b_1, b_2\right]_\alpha^{\ \beta} Q^I_\beta \tag{1.2.2}$$

autrement dit les matrices $b_\alpha^{\ \beta}$ représentent l'algèbre de Lie des générateurs bosoniques.

Dans le cas des générateurs $M_{\mu\nu}$ avec $\left[Q^I_\alpha, M_{\mu\nu}\right] = (b_{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}\, Q^I_\beta$, on obtient

$$\left[b_{\mu\nu}, b_{\rho\sigma}\right]_\alpha^{\ \beta} = i\Big(g_{\nu\rho}(b_{\mu\sigma})_\alpha^{\ \beta} - g_{\nu\sigma}(b_{\mu\rho})_\alpha^{\ \beta} + g_{\mu\sigma}(b_{\nu\rho})_\alpha^{\ \beta} - g_{\mu\rho}(b_{\nu\sigma})_\alpha^{\ \beta}\Big) \tag{1.2.3}$$

les quantités $(b_{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}$ forment donc une représentation de l'algèbre de Lorentz, c'est-à-dire les générateurs Q^I_α portent une représentation du groupe de Lorentz :

$$Q^I_\alpha \simeq \sum Q^I_{\alpha_1\cdots\alpha_m, \dot\alpha_1\cdots\dot\alpha_n} \tag{1.2.4}$$

où $Q^I_{\alpha_1\cdots\alpha_m, \dot\alpha_1\cdots\dot\alpha_n}$ appartient à une représentation irréductible de spin $\frac{1}{2}(m+n)$ du groupe de Lorentz (les indices $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ et $\dot\alpha_1 \cdots \dot\alpha_n$, séparément symétrisés, sont des indices spinoriels non pointés et pointés respectivement). Puisque les générateurs Q^I_α sont anticommutants, on doit avoir $m+n \in 2\mathbb{Z}+1$.

Considérons l'anticommutateur $\left\{Q^I_{1_1\cdots 1_m, \dot 1_1\cdots \dot 1_n}, \overline{Q}^I_{\dot 1_1\cdots \dot 1_m, 1_1\cdots 1_n}\right\}$: il appartient à une représentation du groupe de Lorentz de type $\left(\frac{1}{2}(m+n), \frac{1}{2}(m+n)\right)$ et doit se refermer sur un élément bosonique de la superalgèbre. D'après le théorème de Coleman–Mandula, cet élément est soit nul, soit une composante du générateur des translations P_μ qui est le seul élément de l'algèbre bosonique appartenant à une représentation de ce type. Cet anticommutateur est donc nul si $m+n>1$. De plus, puisque cet anticommutateur est un opérateur défini positif dans un espace de Hilbert muni d'une métrique définie positive, on a $Q^I_{1_1\cdots 1_m,\dot{1}_1\cdots\dot{1}_n}=0$ si $m+n>1$. Enfin, comme $Q^I_{\alpha_1\cdots\alpha_m,\dot{\alpha}_1\cdots\dot{\alpha}_n}$ appartient à une représentation irréductible, on en déduit que toutes ses composantes s'annulent si $m+n>1$.

On a donc $m+n=1$, il s'en suit que les générateurs fermioniques Q^I_α et leurs hermitiques conjugués $\overline{Q}^I_{\dot{\alpha}}$ sont des spineurs des représentations $(\frac{1}{2},0)$ et $(0,\frac{1}{2})$ du groupe de Lorentz respectivement et l'on a

$$\{Q^I_\alpha,\overline{Q}^J_{\dot{\beta}}\}=\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}P_\mu U^{IJ} \tag{1.2.5}$$

où la matrice U est invariante de Lorentz. En comparant cette équation avec l'équation complexe conjuguée, on trouve que la matrice U est hermitienne et donc diagonalisable. Par redéfinition des supercharges Q^I_α et $\overline{Q}^I_{\dot{\alpha}}$, on fixe le facteur de normalisation à 2, d'où

$$\{Q^I_\alpha,\overline{Q}^J_{\dot{\beta}}\}=2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}P_\mu\,\delta^{IJ} \tag{1.2.6}$$

Dans le cas des générateurs des translations P_μ, la relation (1.2.1) conduit à

$$\begin{aligned}\big[Q^I_\alpha,P_\mu\big]&=Z^{IJ}(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\,\overline{Q}^{\dot{\beta}J}\\ \big[\overline{Q}^{\dot{\alpha}I},P_\mu\big]&=Z^{*\,IJ}(\overline{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta}\,Q^J_\beta\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

L'identité de Jacobi généralisée sur les générateurs P_μ, P_ν et Q^I_α donne

$$\big[[Q^I_\alpha,P_\mu],P_\nu\big]-\big[[Q^I_\alpha,P_\nu],P_\mu\big]=\big[Q^I_\alpha,[P_\mu,P_\nu]\big]=0 \tag{1.2.8}$$

Or on a

$$\big[[Q^I_\alpha,P_\mu],P_\nu\big]-\big[[Q^I_\alpha,P_\nu],P_\mu\big]=(ZZ^*)^{IJ}(\sigma_\mu\overline{\sigma}_\nu-\sigma_\nu\overline{\sigma}_\mu)_\alpha{}^\beta Q^J_\beta \tag{1.2.9}$$

ce qui implique $ZZ^*=0$.

Considérons maintenant l'anticommutateur $\{Q^I_\alpha,Q^J_\beta\}$, que l'on peut décomposer en parties symétrique et antisymétrique dans les indices. La partie symétrisée dans les indices spinoriels a un spin 1, le seul élément possible d'après le théorème de Coleman–Mandula est le générateur de Lorentz $M_{\mu\nu}$. On a donc

$$\{Q^I_\alpha,Q^J_\beta\}=\epsilon_{\alpha\beta}X^{[IJ]}+\sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}M_{\mu\nu}Y^{\{IJ\}} \tag{1.2.10}$$

où les matrices $X^{[IJ]}$ et $Y^{\{IJ\}}$ sont respectivement antisymétriques et symétriques dans les indices I,J. L'identité de Jacobi généralisée sur P_μ, Q^I_α et Q^J_β contractée avec le tenseur $\varepsilon^{\alpha\beta}$ sélectionne la partie antisymétrique en α,β de la relation. Le terme $\varepsilon^{\alpha\beta}\big[P_\mu,\{Q^I_\alpha,Q^J_\beta\}\big]$ est donc nul puisque la matrice X (invariante de Lorentz) commute avec P_μ. On a donc

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\big\{Q^J_\beta,[Q^I_\alpha,P_\mu]\big\}+\varepsilon^{\alpha\beta}\big\{Q^I_\alpha,[Q^J_\beta,P_\mu]\big\}=0 \tag{1.2.11}$$

En utilisant la relation (1.2.7), on a, après quelques manipulations d'indices,

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\alpha\beta}\big\{Q^J_\beta,[Q^I_\alpha,P_\mu]\big\}+\varepsilon^{\alpha\beta}\big\{Q^I_\alpha,[Q^J_\beta,P_\mu]\big\}&=\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma_{\mu\,\beta\dot{\beta}}\Big(Z^{IK}\{Q^J_\alpha,\overline{Q}^K_{\dot{\alpha}}\}-Z^{JK}\{Q^I_\alpha,\overline{Q}^K_{\dot{\alpha}}\}\Big)\\&=2\,\overline{\sigma}^{\dot{\beta}\beta}_\mu\,\sigma^\nu_{\beta\dot{\beta}}\big(Z^{IJ}-Z^{JI}\big)P_\nu\end{aligned} \tag{1.2.12}$$

On en déduit $Z^{IJ}-Z^{JI}=0$, la matrice Z est symétrique. Puisque $ZZ^*=0$, on a donc $Z=0$. D'où les relations

$$\big[P_\mu,Q^I_\alpha\big]=\big[P_\mu,\overline{Q}^I_{\dot{\alpha}}\big]=0 \tag{1.2.13}$$

L'identité de Jacobi généralisée sur P_μ, Q^I_α et Q^J_β implique alors $\left[P_\mu, \{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\}\right] = 0$, d'où $Y^{\{IJ\}} = 0$.

Les générateurs de supersymétrie Q^I_α et $\overline{Q}^I_{\dot\alpha}$ portent aussi une représentation de l'algèbre de symétrie interne. On a donc (les générateurs T_A étant hermitiens)

$$\begin{aligned} \left[Q^I_\alpha, T_A\right] &= (S_A)^{IJ}\, Q^J_\alpha \\ \left[\overline{Q}^I_{\dot\alpha}, T_A\right] &= -(S^*_A)^{IJ}\, \overline{Q}^J_{\dot\alpha} \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

L'identité de Jacobi généralisée sur T_A, Q^I_α et $\overline{Q}^J_{\dot\beta}$

$$\left\{\overline{Q}^J_{\dot\beta}, \left[Q^I_\alpha, T_A\right]\right\} + \left\{Q^I_\alpha, \left[\overline{Q}^J_{\dot\beta}, T_A\right]\right\} = \left[\left\{Q^I_\alpha, \overline{Q}^J_{\dot\beta}\right\}, T_A\right] \tag{1.2.15}$$

donne

$$(S_A)^{IK}\left\{Q^K_\alpha, \overline{Q}^J_{\dot\beta}\right\} - (S^*_A)^{JK}\left\{Q^I_\alpha, \overline{Q}^K_{\dot\beta}\right\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\, \delta^{IJ}\left[P_\mu, T_A\right] = 0 \tag{1.2.16}$$

c'est-à-dire, en utilisant (1.2.6),

$$2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\, P_\mu\big((S_A)^{IJ} - (S^*_A)^{JI}\big) = 0 \tag{1.2.17}$$

ce qui montre que la matrice S_A est hermitienne. Les générateurs T_A agissent donc par une représentation unitaire sur l'espace de dimension N des supercharges Q^I_α (et $\overline{Q}^I_{\dot\alpha}$). Le groupe de symétrie interne le plus grand qui puisse agir non trivialement sur les supercharges Q^I_α et $\overline{Q}^I_{\dot\alpha}$ est donc $U(N)$, appelé R-symétrie.

Par ailleurs, l'identité de Jacobi généralisée sur T_A, Q^I_α et Q^J_β

$$\left[\left\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\right\}, T_A\right] = \left\{Q^I_\alpha, \left[Q^J_\beta, T_A\right]\right\} + \left\{Q^J_\beta, \left[Q^I_\alpha, T_A\right]\right\} \tag{1.2.18}$$

conduit à la relation

$$\left[T_A, X^{[IJ]}\right] = (S_A)^{IK}\, X^{[JK]} - (S_A)^{JK}\, X^{[IK]} \tag{1.2.19}$$

Les matrices $X^{[IJ]}$ étant invariantes de Lorentz doivent s'exprimer en termes des générateurs T_A de l'algèbre de symétrie interne. On peut donc écrire $X^{[IJ]} = a^{A|IJ}\, T_A$ où les coefficients $a^{A|IJ}$ sont antisymétriques dans les indices I, J. On a d'après (1.2.19)

$$\left[X^{[IJ]}, X^{[KL]}\right] = a^{A|IJ}(S_A)^{KM}\, X^{[LM]} - a^{A|IJ}(S_A)^{LM}\, X^{[KM]} \tag{1.2.20}$$

Les $X^{[IJ]}$ forment donc une sous-algèbre invariante de l'algèbre $\mathcal{A}$.
Enfin, l'identité de Jacobi généralisée sur Q^I_α, Q^J_β et $\overline{Q}^K_{\dot\gamma}$

$$\left[\left\{Q^J_\beta, \overline{Q}^K_{\dot\gamma}\right\}, Q^I_\alpha\right] + \left[\left\{\overline{Q}^K_{\dot\gamma}, Q^I_\alpha\right\}, Q^J_\beta\right] + \left[\left\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\right\}, \overline{Q}^K_{\dot\gamma}\right] = 0 \tag{1.2.21}$$

donne

$$2\sigma^\mu_{\beta\dot\gamma}\, \delta^{JK}\left[P_\mu, Q^I_\alpha\right] + 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\gamma}\, \delta^{IK}\left[P_\mu, Q^J_\beta\right] + \varepsilon_{\alpha\beta}\left[X^{[IJ]}, \overline{Q}^K_{\dot\gamma}\right] = 0 \tag{1.2.22}$$

d'où $\left[X^{[IJ]}, \overline{Q}^K_{\dot\gamma}\right] = 0$ compte tenu de (1.2.13). On a donc

$$\left[X^{[IJ]}, X^{[KL]}\right] = \tfrac{1}{2}\, \epsilon^{\beta\alpha}\left[\left\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\right\}, X^{[KL]}\right] = 0 \tag{1.2.23}$$

Les générateurs $X^{[IJ]}$ forment donc une sous-algèbre abélienne invariante de $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ où $\mathcal{A}_1$ est semi-simple et $\mathcal{A}_2$ est abélienne, on en déduit que $X^{[IJ]} \in \mathcal{A}_2$ et donc commute avec tous les générateurs de $\mathcal{A}$, i.e. $\left[T_A, X^{[IJ]}\right] = 0$. Les $X^{[IJ]}$ sont donc des *charges centrales*.

Finalement, l'algèbre de supersymétrie s'écrit, outre les relations (1.1.1),

$$
\begin{array}{lll}
[Q^I_\alpha, M_{\mu\nu}] = (\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta\, Q^I_\beta & [\overline{Q}^I_{\dot\alpha}, M_{\mu\nu}] = -\overline{Q}^I_{\dot\beta}\,(\overline{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha} & [P_\mu, Q^I_\alpha] = [P_\mu, \overline{Q}^I_{\dot\alpha}] = 0 \\
\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\} = \varepsilon_{\alpha\beta} X^{[IJ]} & \{\overline{Q}^I_{\dot\alpha}, \overline{Q}^J_{\dot\beta}\} = -\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} X^{\dagger[IJ]} & \{Q^I_\alpha, \overline{Q}^J_{\dot\beta}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\, P_\mu\, \delta^{IJ} \\
[Q^I_\alpha, T_A] = (S_A)^{IJ}\, Q^J_\alpha & [\overline{Q}^I_{\dot\alpha}, T_A] = -\overline{Q}^J_{\dot\alpha}\,(S_A)^{JI} & [X^{[IJ]}, \bullet] = 0
\end{array}
\qquad (1.2.24)
$$

Remarque 1.2
L'identité de Jacobi généralisée sur T_A, T_B et Q^I_α

$$\big[[Q^I_\alpha, T_A], T_B\big] - \big[[Q^I_\alpha, T_B], T_A\big] = \big[Q^I_\alpha, [T_A, T_B]\big] \qquad (1.2.25)$$

donne, avec $[T_A, T_B] = i f_{AB}{}^C T_C$,

$$(S_A)^{IJ}(S_B)^{JK} Q^K_\alpha - (S_B)^{IJ}(S_A)^{JK} Q^K_\alpha = i f_{AB}{}^C (S_C)^{IK} Q^K_\alpha \qquad (1.2.26)$$

c'est-à-dire $[S_A, S_B] = i f_{AB}{}^C S_C$. Les matrices S_A forment donc une représentation de l'algèbre $\mathcal{A}$. On montre de façon similaire que les matrices $-S^*_A$ satisfont les mêmes relations de commutation.
La relation (1.2.19) et l'expression des charges centrales $X^{[IJ]}$ en fonction des T_A impliquent

$$(S_A)^{JK}\, a^{A|IK} = (S_A)^{IK}\, a^{A|JK} \qquad (1.2.27)$$

c'est-à-dire, puisque S_A est hermitienne,

$$(S_A)^{JK}\, a^{A|KI} = a^{A|JK}\, (-S^*_A)^{KI} \qquad (1.2.28)$$

Cette dernière relation montre que les $a^{A|IJ}$ constituent des opérateurs d'entrelacement entre les représentations données par les matrices S_A et $-S^*_A$. Les charges centrales $X^{[IJ]}$ n'existent donc que si l'algèbre $\mathcal{A}$ admet de tels opérateurs d'entrelacement.

Remarque 1.3
Les relations de commutation de l'algèbre de supersymétrie montrent que l'on a en particulier, puisque $J_3 = M^{12}$,

$$[J_3, Q^I_1] = -\tfrac{1}{2}\, Q^I_1 \qquad \text{et} \qquad [J_3, Q^I_2] = \tfrac{1}{2}\, Q^I_2 \qquad (1.2.29)$$

et de même en prenant l'équation conjuguée

$$[J_3, \overline{Q}^I_{\dot 1}] = \tfrac{1}{2}\, \overline{Q}^I_{\dot 1} \qquad \text{et} \qquad [J_3, \overline{Q}^I_{\dot 2}] = -\tfrac{1}{2}\, \overline{Q}^I_{\dot 2} \qquad (1.2.30)$$

Les générateurs Q^I_2 et $\overline{Q}^I_{\dot 1}$ augmentent donc la composante z du spin d'une demi-unité, alors que les générateurs Q^I_1 et $\overline{Q}^I_{\dot 2}$ la diminuent d'une demi-unité.

Dans le cas particulier où $N = 1$ (supersymétrie non étendue), les charges centrales sont nulles et le groupe de R-symétrie se réduit à $U(1)$. On obtient, en notant R le générateur (proprement normalisé) de la R-symétrie :

$$
\begin{array}{lll}
[Q_\alpha, M_{\mu\nu}] = (\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta & [\overline{Q}_{\dot\alpha}, M_{\mu\nu}] = -\overline{Q}_{\dot\beta}(\overline{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha} & [P_\mu, Q_\alpha] = [P_\mu, \overline{Q}_{\dot\alpha}] = 0 \\
\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\overline{Q}_{\dot\alpha}, \overline{Q}_{\dot\beta}\} = 0 & \{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\, P_\mu & \\
[Q_\alpha, R] = Q_\alpha & [\overline{Q}_{\dot\alpha}, R] = -\overline{Q}_{\dot\alpha} &
\end{array}
\qquad (1.2.31)
$$

L'algèbre de supersymétrie peut s'écrire en notation quadri-spinorielle en introduisant les supercharges de supersymétrie sous la forme d'un spineur de Majorana $Q_a^I = \begin{pmatrix} Q_\alpha^I \\ \overline{Q}^{\dot{\alpha} I} \end{pmatrix}$, où les matrices de Dirac γ^μ sont en représentation de Majorana, C est la matrice de conjugaison de charge et $\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]$ sont les générateurs du groupe de Lorentz dans la représentation $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
&\left[Q_a^I, M_{\mu\nu}\right] = \tfrac{1}{2}(\Sigma_{\mu\nu})_a{}^b Q_b^I \\
&\left[P_\mu, Q_a^I\right] = 0 \\
&\left\{Q_a^I, Q_b^J\right\} = 2(\gamma^\mu C)_{ab} P_\mu \delta^{IJ} + C_{ab} U^{[IJ]} + (\gamma_5 C)_{ab} V^{[IJ]} \\
&\left[Q_a^I, T_A\right] = (\xi_A)^I{}_J Q_a^J + i(\zeta_A)^I{}_J (\gamma_5)_a{}^b Q_b^J \\
&\left[U^{[IJ]}, \bullet\right] = \left[V^{[IJ]}, \bullet\right] = 0
\end{aligned} \tag{1.2.32}$$

les charges centrales $U^{[IJ]}$ et $V^{[IJ]}$ s'expriment en fonction de $X^{[IJ]}$ et la matrice $(\xi_A + i\zeta_A)$ est antihermitienne.

Dans le cas de la supersymétrie non étendue $N = 1$, les relations deviennent

$$\begin{aligned}
&\left[Q_a, M_{\mu\nu}\right] = \tfrac{1}{2}(\Sigma_{\mu\nu})_a{}^b Q_b \\
&\left[P_\mu, Q_a\right] = 0 \\
&\left\{Q_a, Q_b\right\} = 2(\gamma^\mu C)_{ab} P_\mu \\
&\left[Q_a, R\right] = i(\gamma_5)_a{}^b Q_b
\end{aligned} \tag{1.2.33}$$

2. Représentations de l'algèbre de supersymétrie

2.1 Généralités

On considère ici uniquement les représentations de dimension finie de l'algèbre de supersymétrie. L'algèbre de Poincaré étant une sous-algèbre de l'algèbre de supersymétrie, une représentation irréductible de l'algèbre de supersymétrie sera donc aussi une représentation de l'algèbre de Poincaré, mais en général réductible. Une particule étant une représentation irréductible de l'algèbre de Poincaré, il s'en suit qu'une représentation irréductible de l'algèbre de supersymétrie correspond à une collection de particules, reliées les unes aux autres par l'action des générateurs de supersymétrie Q^I_α et $\overline{Q}^I_{\dot\alpha} = (Q^I_\alpha)^\dagger$. Ceux-ci étant de nature fermionique, ils relient les états de spin entier (états bosoniques) aux états de spin demi-entier (états fermioniques). L'ensemble des états d'une représentation irréductible de dimension finie de l'algèbre de supersymétrie sera appelé "supermultiplet".

Opérateurs de Casimir de l'algèbre de supersymétrie. L'algèbre de supersymétrie possède deux opérateurs de Casimir (éléments de l'algèbre enveloppante qui commutent avec tous les générateurs de l'algèbre).
Comme P^μ commute avec les générateurs de supersymétrie Q^I_α et $\overline{Q}^I_{\dot\alpha}$, l'opérateur $P^2 = P^\mu P_\mu$ constitue un opérateur de Casimir.
L'autre opérateur de Casimir C^2 est plus élaboré et se construit à partir de l'opérateur de Pauli-Lubanski W_μ de l'algèbre de Poincaré, voir formule (A.2.7) pour la définition de W_μ :

$$C^2 = C^{\mu\nu} C_{\mu\nu} \qquad \text{avec} \qquad C_{\mu\nu} = W'_\mu P_\nu - W'_\nu P_\mu \tag{2.1.1}$$

et (somme sur I sous-entendue)

$$W'_\mu = W_\mu - \tfrac{1}{4}\, \overline{Q}^I_{\dot\alpha}\, \sigma_\mu^{\dot\alpha\alpha}\, Q^I_\alpha \tag{2.1.2}$$

On vérifie notamment que l'on a (voir formule (A.1.20) pour la définition de $(\sigma_{\mu\nu})^\beta{}_\alpha$)

$$\left[W_\mu, Q_\alpha\right] = -i (\sigma_{\mu\nu})^\beta{}_\alpha\, Q_\beta\, P^\nu \tag{2.1.3}$$

Propriété 2.1 *Tous les états d'un supermultiplet ont la même masse.*

En effet, $P^2 = P^\mu P_\mu$ étant un opérateur de Casimir pour l'algèbre de supersymétrie, les représentations de l'algèbre de supersymétrie sont repérées par la masse M où M^2 est la valeur propre de P^2. □

Cette dégénérescence de masse entre fermions et bosons n'étant pas observée dans les spectres de particules connues, la supersymétrie, si elle est réalisée dans la nature, est nécessairement brisée.

Propriété 2.2 *Les représentations de dimension finie de l'algèbre de supersymétrie contiennent un nombre égal d'états bosoniques et d'états fermioniques.*

On introduit l'opérateur "nombre fermionique" N_F défini par

$$(-1)^{N_F} |B\rangle = |B\rangle \qquad |B\rangle \ \text{état bosonique} \tag{2.1.4}$$

$$(-1)^{N_F} |F\rangle = -|F\rangle \qquad |F\rangle \ \text{état fermionique} \tag{2.1.5}$$

Les générateurs de supersymétrie font passer d'un état fermionique à un état bosonique (et réciproquement) : $Q^A_\alpha|F\rangle = |B\rangle$, d'où

$$\begin{aligned} (-1)^{N_F} Q^A_\alpha |F\rangle &= (-1)^{N_F}|B\rangle = |B\rangle \\ Q^A_\alpha (-1)^{N_F}|F\rangle &= -Q^A_\alpha|F\rangle = -|B\rangle \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

et donc $\left\{(-1)^{N_F}, Q^A_\alpha\right\} = 0$.

Dans une représentation de dimension finie, la trace est définie et l'on a $\operatorname{tr}\left((-1)^{N_F}\left\{Q^A_\alpha, \overline{Q}^B_{\dot\beta}\right\}\right) = 0$ en utilisant le résultat précédent et la cyclicité de la trace. On obtient donc d'après les relations de commutation de l'algèbre de supersymétrie

$$\operatorname{tr}\left((-1)^{N_F}\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}P_\mu\delta^{AB}\right) = 0 \tag{2.1.7}$$

Pour un moment P^μ non nul, on a $\operatorname{tr}\left((-1)^{N_F}\right) = 0$, c'est-à-dire autant d'états propres de N_F avec valeur propre $+1$ et -1. $\square$

Propriété 2.3 *Tous les états d'un supermultiplet ont une énergie P_0 positive.*

En effet, soit $|\Psi\rangle$ un état d'un supermultiplet. Par positivité de l'espace de Hilbert, on a

$$\|Q^A_\alpha|\Psi\rangle\|^2 + \|(Q^A_\alpha)^\dagger|\Psi\rangle\|^2 \geq 0 \tag{2.1.8}$$

d'où

$$\langle\Psi|Q^A_\alpha(Q^A_\alpha)^\dagger + (Q^A_\alpha)^\dagger Q^A_\alpha|\Psi\rangle = \langle\Psi|\left\{Q^A_\alpha, \overline{Q}^A_{\dot\alpha}\right\}|\Psi\rangle \geq 0 \tag{2.1.9}$$

c'est-à-dire

$$\langle\Psi|2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}P_\mu|\Psi\rangle \geq 0 \tag{2.1.10}$$

On obtient alors $\langle\Psi|P_0|\Psi\rangle \geq 0$ en sommant l'équation précédente sur les indices spinoriels et en prenant la trace sur les matrices de Pauli (on rappelle que $\operatorname{tr}\sigma^\mu = 2\delta^{\mu 0}$). $\square$

L'étude des représentations de l'algèbre de supersymétrie suit celle des représentations irréductibles de l'algèbre de Poincaré (restreint). Le groupe de Poincaré ayant une structure de produit semi-direct $T(4) \rtimes O(1,3)$, où $T(4)$ est un groupe abélien, la méthode de Wigner des représentations induites est particulièrement adaptée : la détermination des représentations irréductibles unitaires du groupe de Poincaré se réduit au problème de la classification des représentations irréductibles unitaires du petit groupe laissant le quadri-moment invariant et on transporte ces dernières au groupe de Poincaré entier. L'orbite d'un quadri-moment donné de l'espace de Minkowski sous les transformations de Lorentz est l'hypersurface de moment carré P^2 constant. On trouve ainsi les représentations massives ($P^2 = M^2$, l'hypersurface est un hyperboloïde à deux nappes), de masse nulle ($P^2 = 0$, l'hypersurface est le cône de lumière) et tachyoniques ($P^2 = -M^2$, l'hypersurface est un hyperboloïde à une nappe). Compte tenu de la proposition 2.3, ces dernières ne sont pas réalisées par l'algèbre de supersymétrie.

2.2 Représentations massives (sans charge centrale)

Les représentations massives correspondent à $P^2 > 0$. Dans le référentiel du centre de masse où $P_\mu = (M, 0, 0, 0)$, l'algèbre de supersymétrie prend la forme (pour des charges centrales nulles)

$$\begin{aligned} \left\{Q^I_\alpha, \overline{Q}^J_{\dot\beta}\right\} &= 2M\delta_{\alpha\dot\beta}\delta^{IJ} \\ \left\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\right\} &= \left\{\overline{Q}^I_{\dot\alpha}, \overline{Q}^J_{\dot\beta}\right\} = 0 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Les opérateurs normalisés $a^I_\alpha = Q^I_\alpha/\sqrt{2M}$ et $(a^I_\alpha)^\dagger = \overline{Q}^I_{\dot\alpha}/\sqrt{2M}$ satisfont donc une algèbre de Clifford en dimension $2N$:

$$\left\{a^I_\alpha, a^{J\,\dagger}_\beta\right\} = \delta^{IJ}\,\delta_{\alpha\beta}\,, \qquad \left\{a^I_\alpha, a^J_\beta\right\} = \left\{a^{I\,\dagger}_\alpha, a^{J\,\dagger}_\beta\right\} = 0 \tag{2.2.2}$$

De plus, l'opérateur de Pauli-Lubanski se réduit à $W_i = MS_i$ $(i = 1,2,3)$ où S_i est l'opérateur de spin et le Casimir C^2 s'écrit

$$C^2 = 2M^4 J_i J^i \qquad \text{où} \qquad J_i = S_i - \frac{1}{4M}\,\overline{Q}^I_{\dot\alpha}\,\sigma_i^{\dot\alpha\alpha}\,Q^I_\alpha \tag{2.2.3}$$

Les opérateurs J_i satisfont l'algèbre $su(2)$ et donc J^2 a pour valeurs propres $j(j+1)$ où $j \in \mathbb{Z}/2$.

Par ailleurs, les opérateurs J_i commutent avec les générateurs de supersymétrie Q^I_α et $\overline{Q}^I_{\dot\alpha}$ (le commutateur est proportionnel à P_i qui est nul dans le référentiel du centre de masse). Un état $|j,m\rangle$ d'une représentation de spin j étant donné $(-j \leq m \leq j)$, on définit l'état $|\Omega\rangle = \prod_I Q^I_1 Q^I_2 |j,m\rangle$ qui satisfait $Q^J_\alpha|\Omega\rangle = 0$. L'action des opérateurs J_i sur cet état se réduit alors à l'action du spin S_i. Cet état est donc un état propre du spin. L'ensemble des états $|\Omega\rangle$ de j donné forme donc un multiplet de spin d'états fondamentaux qui constitue un état de vide pour l'algèbre de Clifford, dégénéré $(2j+1)$ fois.

Les états d'une représentation irréductible massive de l'algèbre de supersymétrie sont donc caractérisés par la valeur de la masse M et du spin s et sont arrangés en multiplets de spin de l'état de vide $|\Omega\rangle$ de spin donné s, annihilé par les opérateurs a^I_α. Les autres états de la représentation sont donnés par

$$|a^{I_1}_{\alpha_1}\ldots a^{I_n}_{\alpha_n}\rangle = (a^{I_1}_{\alpha_1})^\dagger\ldots(a^{I_n}_{\alpha_n})^\dagger|\Omega\rangle \tag{2.2.4}$$

L'anticommutation des opérateurs $(a^{I_1}_{\alpha_1})^\dagger$ implique l'antisymétrie des états $|a^{I_1}_{\alpha_1}\ldots a^{I_n}_{\alpha_n}\rangle$ dans l'échange des paires (α_i, I_i) et (α_j, I_j). Comme $\alpha_i \in \{1,2\}$ et I_i varie de 1 à N, la valeur de n est bornée à $n \leq 2N$. Pour une valeur de n donnée, il y a $\binom{2N}{n}$ états distincts. La dimension de la représentation est donc donnée par

$$d = \sum_{n=0}^{2N}\binom{2N}{n} = 2^{2N} \tag{2.2.5}$$

Pour un état fondamental $|\Omega\rangle$ de spin s, l'état de spin maximal a un spin $s + \frac{1}{2}N$ (il est maximallement symétrique dans les indices spinoriels) et l'état de spin minimal a un spin 0 si $s \leq \frac{1}{2}N$ ou $s - \frac{1}{2}N$ si $s \geq \frac{1}{2}N$.

Si l'état fondamental $|\Omega\rangle$ a un spin nul, le nombre total d'états de spin est égal à 2^{2N} avec 2^{2N-1} états fermioniques (construits avec un nombre impair d'opérateurs $(a^I_\alpha)^\dagger$) et 2^{2N-1} états bosoniques (construits avec un nombre pair d'opérateurs $(a^I_\alpha)^\dagger$).

Exemples

On appelle $|\Omega_\omega\rangle$ les états fondamentaux de spin s $(\omega = 1,\ldots,2s+1)$. On utilise les notations $\{\alpha\beta\}$ et $[\alpha\beta]$ pour désigner les symétrisations et antisymétrisations sur les indices α et β. Ainsi, on a par exemple $(a_{[\alpha})^\dagger(a_{\beta]})^\dagger|\Omega_\omega\rangle = (a^\dagger_\alpha a^\dagger_\beta - a^\dagger_\beta a^\dagger_\alpha)|\Omega_\omega\rangle$ et $(a_{\{\alpha})^\dagger|\Omega_{\omega\}}\rangle = a^\dagger_\alpha|\Omega_\omega\rangle + a^\dagger_\omega|\Omega_\alpha\rangle$.

Cas $N = 1$. Si le vide a un spin 0, les états de spin nul sont $|\Omega_0\rangle$ et $(a_{[\alpha})^\dagger(a_{\beta]})^\dagger|\Omega_0\rangle$. Les états de spin $\frac{1}{2}$ sont $a^\dagger_\alpha|\Omega_0\rangle$. On décrit donc deux particules de spin 0 et une particule de spin $\frac{1}{2}$.

Si le vide $|\Omega_\omega\rangle$ a un spin $\frac{1}{2}$ $(\omega = 1,2)$, on obtient un état de spin 0 : $(a_{[\alpha})^\dagger|\Omega_{\omega]}\rangle$, quatre états de spin $\frac{1}{2}$: $|\Omega_\omega\rangle$ et $(a_{[\alpha})^\dagger(a_{\beta]})^\dagger|\Omega_\omega\rangle$, trois états de spin 1 : $(a_{\{\alpha})^\dagger|\Omega_{\omega\}}\rangle$. On décrit donc une particule de spin 0, deux particules de spin $\frac{1}{2}$ et une particule de spin 1.

Plus généralement, si le vide $|\Omega_\omega\rangle$ a un spin j ($\omega = 1, \ldots, 2j+1$), on décrit deux particules de spin j, une particule de spin $j - \frac{1}{2}$ et une particule de spin $j + \frac{1}{2}$.

Le tableau suivant donne le contenu en multiplets de spin des représentations massives $N = 1$:

$N = 1$

spin	Ω_0	$\Omega_{1/2}$	Ω_1	$\Omega_{3/2}$
0	2	1		
1/2	1	2	1	
1		1	2	1
3/2			1	2
2				1

Cas $N = 2$. Si le vide a un spin 0, les cinq états de spin 0 sont obtenus de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&|\Omega_0\rangle\\
&(a^1_{[\alpha})^\dagger(a^1_{\beta]})^\dagger|\Omega_0\rangle, (a^2_{[\alpha})^\dagger(a^2_{\beta]})^\dagger|\Omega_0\rangle\\
&(a^1_{[\alpha})^\dagger(a^2_{\beta]})^\dagger + (a^2_{[\alpha})^\dagger(a^1_{\beta]})^\dagger|\Omega_0\rangle\\
&(a^1_{[\alpha})^\dagger(a^1_{\beta]})^\dagger(a^2_{[\alpha'})^\dagger(a^2_{\beta']})^\dagger|\Omega_0\rangle
\end{aligned}$$

les huit états de spin $\frac{1}{2}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}
&(a^1_{\alpha})^\dagger|\Omega_0\rangle, (a^2_{\alpha})^\dagger|\Omega_0\rangle\\
&(a^2_{\gamma})^\dagger(a^1_{[\alpha})^\dagger(a^1_{\beta]})^\dagger|\Omega_0\rangle\\
&(a^1_{\gamma})^\dagger(a^2_{[\alpha})^\dagger(a^2_{\beta]})^\dagger|\Omega_0\rangle\\
&(a^1_{[\alpha})^\dagger(a^1_{\beta]})^\dagger(a^2_{[\alpha'})^\dagger(a^2_{\beta']})^\dagger|\Omega_0\rangle
\end{aligned}$$

et les trois états de spin 1 sont

$$(a^1_{\{\alpha})^\dagger(a^2_{\beta\}})^\dagger - (a^2_{\{\alpha})^\dagger(a^1_{\beta\}})^\dagger|\Omega_0\rangle$$

On décrit donc cinq particules de spin 0, quatre particules de spin $\frac{1}{2}$ et une particule de spin 1.

Si le vide a un spin $\frac{1}{2}$, les quatre états de spin 0 sont obtenus de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&(a^1_{[\alpha})^\dagger|\Omega_{\omega]}\rangle, (a^2_{[\alpha})^\dagger|\Omega_{\omega]}\rangle\\
&(a^1_{[\alpha})^\dagger(a^1_{\beta]})^\dagger(a^2_{[\gamma})^\dagger|\Omega_{\omega]}\rangle\\
&(a^2_{[\alpha})^\dagger(a^2_{\beta]})^\dagger(a^1_{[\gamma})^\dagger|\Omega_{\omega]}\rangle
\end{aligned}$$

les douze états de spin $\frac{1}{2}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}
&|\Omega_\omega\rangle, (a^1_{[\alpha})^\dagger(a^1_{\beta]})^\dagger|\Omega_\omega\rangle, (a^2_{[\alpha})^\dagger(a^2_{\beta]})^\dagger|\Omega_\omega\rangle\\
&(a^2_{\beta})^\dagger(a^1_{[\alpha})^\dagger|\Omega_{\omega]}\rangle, (a^2_{[\beta})^\dagger(a^1_{\{\alpha})^\dagger|\Omega_{\omega\}]}\rangle\\
&(a^1_{[\alpha})^\dagger(a^1_{\beta]})^\dagger(a^2_{[\alpha'})^\dagger(a^2_{\beta']})^\dagger|\Omega_\omega\rangle
\end{aligned}$$

les douze états de spin 1 sont :

$$\begin{aligned}
&(a^1_{\{\alpha})^\dagger|\Omega_{\omega\}}\rangle, (a^2_{\{\alpha})^\dagger|\Omega_{\omega\}}\rangle\\
&(a^1_{[\alpha})^\dagger(a^1_{\beta]})^\dagger(a^2_{\{\gamma})^\dagger|\Omega_{\omega\}}\rangle\\
&(a^2_{[\alpha})^\dagger(a^2_{\beta]})^\dagger(a^1_{\{\gamma})^\dagger|\Omega_{\omega\}}\rangle
\end{aligned}$$

et les états de spin $\frac{3}{2}$ sont

$$(a^2_{\{\beta\}})^\dagger (a^1_{\{\alpha\}})^\dagger |\Omega_{\omega\}\}}\rangle$$

On décrit donc quatre particules de spin 0, six particules de spin $\frac{1}{2}$, quatre particules de spin 1 et une particule de spin $\frac{3}{2}$.

Le tableau suivant donne le contenu en états des représentations massives $N = 2$:

$N = 2$

spin	Ω_0	$\Omega_{1/2}$	Ω_1
0	5	4	1
1/2	4	6	4
1	1	4	6
3/2		1	4
2			1

2.3 Représentations massives (avec charge centrale)

Ces représentations n'apparaissent que dans le cas de la supersymétrie étendue ($N > 1$). Dans le référentiel du centre de masse, l'algèbre de supersymétrie s'écrit en présence de charges centrales $X^{[IJ]}$

$$\begin{aligned}
\left\{Q^I_\alpha, \overline{Q}^J_{\dot\beta}\right\} &= 2M\delta_{\alpha\dot\beta}\delta^{IJ} \\
\left\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\right\} &= \epsilon_{\alpha\beta} X^{[IJ]} \\
\left\{\overline{Q}^I_{\dot\alpha}, \overline{Q}^J_{\dot\beta}\right\} &= -\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} X^{*\,[JI]}
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Par une rotation appropriée du groupe $U(N)$, la matrice antisymétrique des charges centrales (a priori complexe) peut se ramener à une forme standard :

$$X^{[IJ]} = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & 0 & 0 & \cdots \\ -q_1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & q_2 & \cdots \\ 0 & 0 & -q_2 & 0 & \\ \vdots & & \vdots & & \end{pmatrix} \tag{2.3.2}$$

où les q_i sont des réels positifs ($i = 1, ..., N/2$) si N est pair (si N est impair, on rajoute une ligne et une colonne de zéros).

Si l'on pose maintenant, pour $r = 1, \ldots, \left[\frac{1}{2}N\right]$,

$$\begin{aligned}
a^r_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q^{2r-1}_\alpha + \epsilon_{\alpha\beta}(Q^{2r}_\beta)^\dagger\right) \\
b^r_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q^{2r-1}_\alpha - \epsilon_{\alpha\beta}(Q^{2r}_\beta)^\dagger\right)
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

les opérateurs a^r_α, b^r_α et leurs conjugués satisfont une algèbre d'oscillateurs (fermioniques) :

$$\begin{aligned}
\left\{a^r_\alpha, (a^s_\beta)^\dagger\right\} &= (2M + q_r)\delta_{rs}\delta_{\alpha\beta} \\
\left\{b^r_\alpha, (b^s_\beta)^\dagger\right\} &= (2M - q_r)\delta_{rs}\delta_{\alpha\beta} \\
\left\{a^r_\alpha, a^s_\beta\right\} = \left\{a^r_\alpha, b^s_\beta\right\} &= \cdots = 0
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

ce qui impose $q_r \leq 2M$ pour tout r compte tenu de la positivité de la métrique de l'espace de Hilbert. Lorsqu'un indice satisfait l'égalité, les opérateurs correspondants agissent comme zéro. On notera que si $M=0$, l'inégalité impose $q_r=0$ pour tout r : il ne peut y avoir de charges centrales dans le cas des représentations de masse nulle.

Dans le cas général où aucun q_r ne sature l'inégalité, on obtient donc $2N$ oscillateurs et les multiplicités des représentations irréductibles sont les mêmes que celles du cas de charges centrales nulles.

Dans le cas où certaines charges centrales (en nombre k) saturent l'inégalité, k opérateurs de type b^r_α deviennent triviaux (ceux pour lesquels $q_r=2M$). Le nombre d'états d'une représentation de spin j est donc $2^{2N-2k}(2j+1)$ au lieu de $2^{2N}(2j+1)$. Ces multiplets de multiplicité réduite sont appelés multiplets courts.

Dans le cas où toutes les charges centrales saturent l'inégalité, la moitié des oscillateurs deviennent triviaux et le nombre d'états d'une représentation de spin j est donc $2^N(2j+1)$ au lieu de $2^{2N}(2j+1)$. Les multiplets obtenus ont la même dimension que ceux de masse nulle (voir plus loin). Ils sont appelés multiplets ultracourts et les états correspondants états BPS-saturés (BPS = Bogomonlyi–Prasad–Sommerfeld).

Ainsi lorsque $N=2$, les multiplets $j=0$ ont la forme suivante :

Ω_0^{long}	spin	0	$\frac{1}{2}$	1
	# spin irreps	5	4	1
	# états	5	8	3

Ω_0^{court}	spin	0	$\frac{1}{2}$	1
	# spin irreps	2	1	0
	# états	2	2	0

Les multiplets $j=\frac{1}{2}$ ont la forme suivante :

$\Omega_{1/2}^{\text{long}}$	spin	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
	# spin irreps	4	6	4	1
	# états	4	12	12	4

$\Omega_{1/2}^{\text{court}}$	spin	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
	# spin irreps	1	2	1	0
	# états	1	4	3	0

On notera que les spins et les états de ces multiplets massifs BPS-saturés correspondent respectivement à l'hypermultiplet $N=2$ et au multiplet vectoriel $N=2$.

2.4 Représentations de masse nulle

On considère maintenant les représentations de masse nulle, correspondant à $P^2=0$. Dans le référentiel du cône de lumière où $P_\mu=(E,0,0,E)$, l'algèbre de supersymétrie devient

$$\begin{aligned}\{Q^I_\alpha,\overline{Q}^J_{\dot\beta}\}&=4E\delta^{IJ}\delta_{\alpha\dot\beta,1\dot1}\\ \{Q^I_\alpha,Q^J_\beta\}&=\{\overline{Q}^I_{\dot\alpha},\overline{Q}^J_{\dot\beta}\}=0\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

Les opérateurs normalisés $a^I = Q^I_1/\sqrt{4E}$ et $(a^I)^\dagger = \overline{Q}^I_{\dot 1}/\sqrt{4E}$ satisfont les relations d'anticommutation d'une algèbre de Clifford à N dimensions :

$$\left\{a^I, a^{J\,\dagger}\right\} = \delta^{IJ}\ , \qquad \left\{a^I, a^J\right\} = \left\{a^{I\,\dagger}, a^{J\,\dagger}\right\} = 0 \tag{2.4.2}$$

Les opérateurs $a'^I = Q^I_2/\sqrt{4E}$ et $(a'^I)^\dagger = \overline{Q}^I_{\dot 2}/\sqrt{4E}$ sont mutuellement anticommutants et agissent comme zéro sur les états de la représentation.

L'opérateur de Pauli-Lubanski W_μ est proportionnel à P_μ, $W_\mu = \lambda P_\mu$, où λ est l'hélicité. Dans le référentiel choisi, l'opérateur d'hélicité – voir formule (A.2.16) – se réduit à $M_{12} = J_3$. Les relations de commutation (1.2.29)–(1.2.30) des générateurs de supersymétrie Q^I_α et $\overline{Q}^I_{\dot\alpha}$ avec J_3 montrent que l'hélicité décroît de $\frac{1}{2}$ par action de Q^I_1 et croît de $\frac{1}{2}$ par action de $\overline{Q}^I_{\dot 1}$.

Une représentation de l'algèbre de supersymétrie est caractérisée par un état de vide de Clifford $|E, \lambda\rangle$ étiqueté par l'énergie E et l'hélicité λ, annihilé par les opérateurs a^I : $a^I|E, \lambda\rangle = 0$ pour tout I. Cet état porte une représentation de l'algèbre de Poincaré et peut correspondre soit à un boson de masse nulle, soit à un fermion de masse nulle. Les autres états de la représentation sont donnés par

$$|a^{I_1} \dots a^{I_n}\rangle = (a^{I_1})^\dagger \dots (a^{I_n})^\dagger |E, \lambda\rangle \tag{2.4.3}$$

Ces états sont antisymétriques dans l'échange de $I_1, \dots, I_n$ et leur hélicité est $\lambda + \frac{1}{2}\,n$. Ces états sont donc obtenus par action sur le vide $|E, \lambda\rangle$ de n opérateurs distincts $(a^I)^\dagger$ parmi les N possibles, leur nombre est $\binom{N}{n}$. L'hélicité maximale est ainsi $\lambda + \frac{1}{2}\,N$. La dimension de la représentation est donnée par

$$d = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} = 2^N \tag{2.4.4}$$

dont 2^{N-1} états bosoniques (hélicité entière) et 2^{N-1} états fermioniques (hélicité demi-entière) puisque

$$\sum_{n=0}^{N/2} \binom{N}{2n} - \sum_{n=0}^{N/2} \binom{N}{2n+1} = 0 \tag{2.4.5}$$

On notera qu'en général ces supermultiplets ne sont pas invariants sous CPT (l'hélicité n'est pas distribuée symétriquement autour de zéro, alors que CPT renverse le signe de l'hélicité, sauf si $\lambda = -N/4$). Dans une théorie quantique des champs invariante sous CPT, il est donc nécessaire de doubler ces supermultiplets par adjonction de leur conjugué sous CPT.

Exemples $N = 1$

Dans le cas $N = 1$, les supermultiplets de masse nulle ne sont jamais invariants sous CPT. Ils sont constitués des états $|\lambda\rangle := |E, \lambda\rangle$ et $|\lambda + \frac{1}{2}\rangle := a^\dagger|E, \lambda\rangle$ et on les note $(\lambda, \lambda + \frac{1}{2})$.

— Multiplet chiral : $(0, \frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2}, 0)$, correspondant à un spineur de Weyl et un champ scalaire complexe.

— Multiplet vectoriel : $(\frac{1}{2}, 1) + (-1, -\frac{1}{2})$, correspondant à un champ de jauge vectoriel de masse nulle et un spineur de Weyl.

— Multiplet du gravitino : $(1, \frac{3}{2}) + (-\frac{3}{2}, -1)$, correspondant à un champ de gravitino et un boson de jauge vectoriel de masse nulle.

— Multiplet du graviton : $(\frac{3}{2}, 2) + (-2, -\frac{3}{2})$, correspondant à un champ de graviton et un champ de gravitino.

Exemples $N = 2$

Dans le cas $N = 2$, les supermultiplets de masse nulle sont constitués des états $|\lambda\rangle := |E, \lambda\rangle$, $|\lambda + \frac{1}{2}\rangle_I := (a^I)^\dagger |E, \lambda\rangle$ $(I = 1, 2)$ et $|\lambda + 1\rangle := (a^1)^\dagger (a^2)^\dagger |E, \lambda\rangle$, et on les note $(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}, \lambda + \frac{1}{2}, \lambda + 1)$.

- Multiplet vecteur : $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) + (-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, correspondant à un champ de jauge vectoriel de masse nulle, deux spineurs de Weyl et un champ scalaire complexe. Sous l'algèbre de supersymétrie $N = 1$, ce multiplet se décompose en un multiplet chiral et un multiplet vectoriel.
- Hypermultiplet : $(-\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$, correspondant à deux spineurs de Weyl et deux champs scalaires complexes. Sous l'algèbre de supersymétrie $N = 1$, ce multiplet se décompose en deux multiplets chiraux de chiralités opposées (CPT renverse la chiralité). On notera que le multiplet $(-\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$ n'est pas invariant sous CPT bien que les hélicités soient distribuées symétriquement autour de zéro, d'où le doublement du multiplet. En effet, sous la R-symétrie, les deux états d'hélicité zéro, $(a^I)^\dagger |\lambda = -\frac{1}{2}\rangle$, se transforment comme un doublet de $SU(2)$ alors que les deux états fermioniques, $|\lambda = -\frac{1}{2}\rangle$ et $(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger |\lambda = -\frac{1}{2}\rangle$, sont des singlets. Les représentations de dimension 2 de $SU(2)$ étant pseudo-réelles, l'hypermultiplet ne peut pas être invariant sous CPT.
- Multiplet du graviton : $(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2) + (-2, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -1)$, correspondant à un champ de graviton, deux champs de gravitino et un champ de jauge vectoriel de masse nulle. Sous l'algèbre de supersymétrie $N = 1$, ce multiplet se décompose en un multiplet du gravitino et un multiplet du graviton.

Exemple $N = 4$

Dans le cas $N = 4$, en se restreignant aux hélicités inférieures à 1, on obtient un unique multiplet $(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, invariant sous CPT. Il correspond à un champ de jauge vectoriel de masse nulle, quatre spineurs de Weyl et trois champs scalaires complexes.

Ce multiplet se décompose sous l'algèbre de supersymétrie $N = 2$, en deux multiplets vecteurs et un hypermultiplet ; sous l'algèbre de supersymétrie $N = 1$, en trois multiplets chiraux et un multiplet vectoriel.

On notera qu'ici le supermultiplet est bien invariant sous CPT : les états vectoriels sont des singlets sous la R-symétrie $SU(4)$, les états fermioniques se transforment sous la représentation fondamentale (et sa conjuguée) et les états scalaires sous la représentation deux fois antisymétrique (i.e. la fondamentale de $SO(6)$) qui est réelle.

Exemple $N = 8$

Dans le cas $N = 8$, en se restreignant aux hélicités inférieures à 2, on obtient un unique multiplet contenant un état d'hélicité ± 2, 8 états d'hélicité $\pm\frac{3}{2}$, 28 états d'hélicité ± 1, 56 états d'hélicité $\pm\frac{1}{2}$ et 70 états d'hélicité nulle (ce qui donne bien $2^8 = 256$ états au total).

Remarque 2.1
D'un point de vue strictement algébrique, il n'y a pas de limite à la valeur de N. Néanmoins, dans le cadre d'une théorie quantique des champs cohérente, le spin des particules est limité à un (théorie sans gravitation) ou deux (théorie avec gravitation). Cette étude des représentations de l'algèbre de supersymétrie montre que les valeurs maximales correspondantes de N sont 4 et 8.

Par ailleurs, les états d'hélicité $\frac{1}{2}$ appartenant à des multiplets qui contiennent des états vectoriels doivent se transformer dans la représentation adjointe sous le groupe de jauge. Les seuls états d'hélicité $\frac{1}{2}$ se transformant dans la représentation fondamentale correspondent au multiplet chiral $N = 1$ et à l'hypermultiplet $N = 2$. Sous la supersymétrie $N = 1$, ce dernier se décompose en deux multiplets chiraux de chiralités opposées. Ces deux multiplets chiraux se transforment donc de la même façon sous le groupe de jauge (puisque celui-ci commute avec super-Poincaré). Une théorie $N = 2$ est donc non chirale. Le Modèle Standard étant par nature une théorie chirale (les interactions faibles sont chirales : les composantes gauche et droite des leptons se transforment de façon distincte sous le groupe de jauge), ceci explique pourquoi les efforts se concentrent sur les extensions supersymétriques $N = 1$.

3. Superespace et superchamps

Dans le chapitre précédent, on a construit les représentations irréductibles de dimension finie de l'algèbre de supersymétrie sur les états. Les briques de base d'une théorie quantique des champs étant données par des champs, il s'agit maintenant de construire les représentations de l'algèbre de supersymétrie en termes de champs, c'est-à-dire d'opérateurs $\Phi(x)$ qui engendrent les états $|x\rangle$ à partir d'un état "vide" $|0\rangle$: $|x\rangle = \Phi(x)|0\rangle$, et de déterminer leurs transformations sous l'action de l'algèbre de supersymétrie. Pour cela, on va introduire la notion de superespace, généralisation supersymétrique de l'espace de Minkowski.

Par souci de simplicité, on se restreint dans la suite au cas de la supersymétrie non étendue $N = 1$.

3.1 Un modèle simple de théorie des champs supersymétrique

Le multiplet de masse nulle le plus simple contient une particule de spin 0 et une particule de spin 1/2, décrits en théorie des champs par un champ scalaire complexe ϕ et un spineur de Weyl ψ. Le lagrangien libre qui décrit un tel modèle est donné par

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi + i\psi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi} \tag{3.1.1}$$

conduisant aux équations du mouvement

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi = 0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi = 0 \tag{3.1.2}$$

Cherchons alors à déterminer l'action des transformations de supersymétrie sur les champs ϕ et ψ afin d'obtenir un modèle dont l'action reste invariante sous les transformations de supersymétrie envisagées. Soit ξ le paramètre infinitésimal anticommutant de la transformation (spineur de Weyl), qu'on suppose constant (on parle de transformation de supersymétrie globale). L'action de la transformation de supersymétrie sur le champ scalaire ϕ doit conduire à une expression contenant le champ spinoriel ψ, le choix le plus simple est de considérer

$$\delta_\xi\phi = \xi\psi \qquad \text{et} \qquad \delta_\xi\phi^\dagger = \overline{\xi\psi} \tag{3.1.3}$$

On détermine alors les variations $\delta_\xi\psi$ et $\delta_\xi\overline{\psi}$ du champ spinoriel en imposant au lagrangien (3.1.1) d'être invariant (éventuellement à une dérivée totale près). On a

$$\begin{aligned}\delta_\xi\mathcal{L} &= \partial_\mu(\delta_\xi\phi^\dagger)\partial^\mu\phi + \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu(\delta_\xi\phi) + i\delta_\xi\psi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi} + i\psi\sigma^\mu\partial_\mu(\delta_\xi\overline{\psi}) \\ &= (\overline{\xi}\partial^\mu\phi + i\delta_\xi\psi\sigma^\mu)\partial_\mu\overline{\psi} + \partial_\mu\psi(\xi\partial^\mu\phi^\dagger - i\sigma^\mu\delta_\xi\overline{\psi}) + i\partial_\mu(\psi\sigma^\mu\delta_\xi\overline{\psi})\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

La variation du lagrangien se réduit à une dérivée totale si

$$\delta_\xi\psi = -i\sigma^\mu\overline{\xi}\partial_\mu\phi \qquad \text{et} \qquad \delta_\xi\overline{\psi} = -i\overline{\sigma}^\mu\xi\partial_\mu\phi^\dagger \tag{3.1.5}$$

Pour que le modèle soit effectivement supersymétrique, il faut vérifier que l'algèbre de supersymétrie se ferme, c'est-à-dire que le commutateur de deux transformations de supersymétrie redonne la dérivée des champs, conformément aux relations de commutation (1.2.6). Soient deux transformations de supersymétrie de paramètres ξ_1 et ξ_2, on a pour le champ scalaire

$$[\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}]\phi = \delta_{\xi_1}(\xi_2\psi) - \delta_{\xi_2}(\xi_1\psi) = -i(\xi_2\sigma^\mu\overline{\xi}_1 - \xi_1\sigma^\mu\overline{\xi}_2)\partial_\mu\phi \tag{3.1.6}$$

Pour le champ spinoriel, on obtient

$$
\begin{aligned}
\left[\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}\right]\psi &= -i\sigma^\mu\overline{\xi}_2\partial_\mu(\delta_{\xi_1}\phi) + i\sigma^\mu\overline{\xi}_1\partial_\mu(\delta_{\xi_2}\phi) \\
&= -i\sigma^\mu\overline{\xi}_2\partial_\mu(\xi_1\psi) + i\sigma^\mu\overline{\xi}_1\partial_\mu(\xi_2\psi) \\
&= -i(\xi_2\sigma^\mu\overline{\xi}_1 - \xi_1\sigma^\mu\overline{\xi}_2)\partial_\mu\psi - i(\xi_1\overline{\xi}_2 - \xi_2\overline{\xi}_1)\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi
\end{aligned} \tag{3.1.7}
$$

où l'on a utilisé la formule de réarrangement de Fierz entre les deux dernières lignes.

L'algèbre de supersymétrie ne ferme sur les champs que si l'on impose $\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi = 0$, autrement dit si les équations du mouvement sont satisfaites. Il y a donc fermeture de l'algèbre de supersymétrie sur les champs uniquement on-shell. Une façon alternative de considérer le problème est de compter les degrés de liberté : le champ scalaire complexe possède deux degrés de liberté réels on-shell et off-shell, le spineur de Weyl en possède deux on-shell et quatre off-shell. La règle "boson = fermion" n'est donc pas respectée off-shell.

Une façon de résoudre ce problème est d'introduire un champ scalaire complexe F qui ne doit pas conduire à des degrés de liberté on-shell supplémentaires. Un tel champ est appelé champ auxiliaire : il ne se propage pas et son équation du mouvement est purement algébrique (elle ne contient pas de dérivées). On introduit donc le lagrangien modifié

$$
\mathcal{L}' = \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi + i\psi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi} + F^*F \tag{3.1.8}
$$

Le champ F satisfaisant l'équation du mouvement $F = 0$ ne participe pas aux degrés de liberté on-shell. On impose alors les transformations de supersymétrie suivantes du champ F :

$$
\begin{aligned}
\delta_\xi\, F &= -i\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi \\
\delta_\xi\, F^* &= i\partial_\mu\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\xi
\end{aligned} \tag{3.1.9}
$$

et l'on modifie les formules de transformation du champ spinoriel selon

$$
\begin{aligned}
\delta_\xi\, \psi &= -i\sigma^\mu\overline{\xi}\partial_\mu\phi + \xi F \\
\delta_\xi\, \overline{\psi} &= -i\overline{\sigma}^\mu\xi\partial_\mu\phi^\dagger + \overline{\xi}F^*
\end{aligned} \tag{3.1.10}
$$

On vérifie alors que le lagrangien modifié $\mathcal{L}'$ est invariant, à une dérivée totale près, sous les transformations de supersymétrie (3.1.3), (3.1.10) et (3.1.9) et que l'algèbre de supersymétrie se ferme on-shell *et* off-shell.

Finalement, on obtient un modèle supersymétrique qui contient quatre degrés de liberté on-shell (deux pour ϕ et deux pour ψ) et huit degrés off-shell (deux pour ϕ, quatre pour ψ et deux pour le champ auxiliaire F). Dans les deux cas, la règle "boson = fermion" est respectée. L'ensemble des champs (ϕ, ψ, F) est appelé supermultiplet chiral.

3.2 Construction directe du supermultiplet chiral

En fait, le supermultiplet chiral peut être construit directement sans faire appel à un modèle particulier. On part d'un champ scalaire complexe $\phi(x)$ soumis à la contrainte de chiralité $\left[\overline{Q}_{\dot\alpha}, \phi(x)\right] = 0$. Par action des générateurs de l'algèbre de supersymétrie, on introduit les champs nécessaires à la construction et on détermine les formules de transformation de l'ensemble des champs sous l'action de l'algèbre de supersymétrie.

Par l'identité de Jacobi généralisée, on a

$$\big\{[Q_\alpha,\phi],\overline{Q}_{\dot\alpha}\big\}+\big\{Q_\alpha,[\overline{Q}_{\dot\alpha},\phi]\big\}=\big[\{Q_\alpha,\overline{Q}_{\dot\alpha}\},\phi\big]=-2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\phi \tag{3.2.1}$$

On définit alors le champ spinoriel $\psi_\alpha(x)$ par $\big[Q_\alpha,\phi(x)\big]=\sqrt{2}\,\psi_\alpha(x)$. Compte tenu de la contrainte de chiralité, l'identité de Jacobi généralisée conduit à

$$\big\{\overline{Q}_{\dot\alpha},\psi_\alpha\big\}=-i\sqrt{2}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\phi \tag{3.2.2}$$

On a de plus par l'identité de Jacobi généralisée

$$\big\{Q_\alpha,[Q_\beta,\phi]\big\}+\big\{Q_\beta,[Q_\alpha,\phi]\big\}=\big[\{Q_\alpha,Q_\beta\},\phi\big]=0 \tag{3.2.3}$$

c'est-à-dire $\big\{Q_\alpha,\psi_\beta\big\}+\big\{Q_\beta,\psi_\alpha\big\}=0$. On doit donc avoir

$$\big\{Q_\alpha,\psi_\beta\big\}=-\sqrt{2}\,\epsilon_{\alpha\beta}F \tag{3.2.4}$$

où $F(x)$ est un champ scalaire complexe. L'analyse des dimensions en masse montre que F est de dimension 2 (le champ scalaire $\phi(x)$ est de dimension 1, le champ spinoriel $\psi_\alpha(x)$ de dimension 3/2, le générateur Q_α de dimension 1/2).

Par application des deux relations de Jacobi généralisées sur le champ spinoriel, on obtient l'action des supercharges sur le champ F :

$$\big[\overline{Q}_{\dot\alpha},\{Q_\alpha,\psi_\beta\}\big]+\big[Q_\alpha,\{\overline{Q}_{\dot\alpha},\psi_\beta\}\big]=\big[\{Q_\alpha,\overline{Q}_{\dot\alpha}\},\psi_\beta\big]=0 \tag{3.2.5}$$

c'est-à-dire

$$-\sqrt{2}\,\epsilon_{\alpha\beta}\big[\overline{Q}_{\dot\alpha},F\big]=\big[2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}P_\mu,\psi_\beta\big]+i\sqrt{2}\sigma^\mu_{\beta\dot\alpha}\big[Q_\alpha,\partial_\mu\phi\big]=-2i\big(\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\psi_\beta-\sigma^\mu_{\beta\dot\alpha}\partial_\mu\psi_\alpha\big) \tag{3.2.6}$$

En contractant cette dernière équation avec $\epsilon^{\beta\alpha}$, on obtient alors

$$\big[\overline{Q}_{\dot\alpha},F\big]=-i\sqrt{2}\,\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\psi^\alpha \tag{3.2.7}$$

ou bien

$$\big[\overline{Q}^{\dot\alpha},F\big]=i\sqrt{2}\,\overline{\sigma}^{\mu\,\dot\alpha\alpha}\partial_\mu\psi_\alpha \tag{3.2.8}$$

De même, on a

$$\big[Q_\beta,\{Q_\gamma,\psi_\alpha\}\big]+\big[Q_\gamma,\{Q_\beta,\psi_\alpha\}\big]=\big[\{Q_\beta,Q_\gamma\},\psi_\alpha\big]=0 \tag{3.2.9}$$

c'est-à-dire

$$\epsilon_{\alpha\beta}\big[Q_\gamma,F\big]+\epsilon_{\alpha\gamma}\big[Q_\beta,F\big]=0 \tag{3.2.10}$$

d'où en contractant avec $\epsilon^{\beta\alpha}$,

$$\big[Q_\alpha,F\big]=0 \tag{3.2.11}$$

On vérifie que les autres relations de Jacobi sont satisfaites et ne conduisent pas à des conditions supplémentaires.

Le multiplet de champs (ϕ,ψ,F) forme donc une représentation de l'algèbre de supersymétrie :

$$\begin{aligned}
\big[Q_\alpha,\phi\big]&=\sqrt{2}\psi_\alpha & \big[\overline{Q}_{\dot\alpha},\phi\big]&=0\\
\big\{Q_\alpha,\psi_\beta\big\}&=-\sqrt{2}\epsilon_{\alpha\beta}F & \big\{\overline{Q}_{\dot\alpha},\psi_\alpha\big\}&=-i\sqrt{2}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\,\partial_\mu\phi\\
\big[Q_\alpha,F\big]&=0 & \big[\overline{Q}_{\dot\alpha},F\big]&=-i\sqrt{2}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\,\partial_\mu\psi^\alpha
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

On notera qu'en termes de dimension de masse, si le champ ϕ est de dimension 1 (champ scalaire), les dimensions des champs ψ et F sont respectivement 3/2 (champ spinoriel) et 2, puisque les générateurs de supersymétrie sont de dimension 1/2 (cf. relations de commutation de l'algèbre de supersymétrie).

Remarque 3.1
Le supermultiplet général peut être construit de la même façon : on part d'un champ scalaire complexe $\phi(x)$ et on relaxe la contrainte de chiralité. On définit alors les champs $\psi_\alpha(x) \sim \big[Q_\alpha, \phi(x)\big]$ et $\overline{\chi}^{\dot\alpha}(x) \sim \big[\overline{Q}^{\dot\alpha}, \phi(x)\big]$. On poursuit de la même façon que pour le champ chiral : on impose les différentes identités de Jacobi généralisées, on définit les nouveaux champs nécessaires et on continue le processus jusqu'à épuisement des identités de Jacobi et des nouveaux champs. Le calcul complet est assez lourd mais ne pose pas de difficulté particulière. On obtient finalement un supermultiplet contenant quatre champs scalaires complexes et un champ vectoriel complexe (soit 16 degrés de liberté bosoniques) et quatre spineurs de Weyl (deux gauches et deux droits, soit 16 degrés de liberté fermioniques). L'étude d'un tel supermultiplet général est reportée en section 3.4 dans le cadre du formalisme du superespace introduit dans la section suivante.

3.3 Superespace

Les calculs précédents montrent que la construction *ad hoc* d'une théorie supersymétrique est une procédure qui peut devenir lourde. Par ailleurs, il n'existe pas en général de moyen systématique d'implémenter les “bonnes” contraintes aux champs qui garantit une invariance du modèle sous les transformations de supersymétrie. Ce type de situation apparaît en général lorsque le système de coordonnées n'est pas adapté à la symétrie en considération. Il s'agit alors de déterminer le système de coordonnées dans lequel l'expression de la symétrie étudiée prend une forme simple. Ainsi, le groupe de Poincaré agit comme le groupe de transformations dans l'espace de Minkowski. Ce dernier est isomorphe à l'espace quotient du groupe de Poincaré restreint par le groupe de Lorentz restreint. Il s'agit ici de trouver une construction analogue dans le cas de l'algèbre de supersymétrie ($N = 1$). Pour cela on va considérer l'espace quotient du groupe de super-Poincaré par le groupe de Lorentz restreint.

Rappelons auparavant la construction dans le cas du groupe de Poincaré. Si P_μ et $M_{\mu\nu}$ sont les générateurs de l'algèbre de Poincaré, un élément g du groupe de Poincaré (restreint) est paramétré par dix variables a^μ et $\omega^{\mu\nu}$:

$$g(a, \omega) = \exp i \left(a^\mu P_\mu + \tfrac{1}{2}\, \omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}\right) \tag{3.3.1}$$

Les translations correspondent à $g(a, 0)$ et les transformations de Lorentz à $g(0, \omega)$. Par ailleurs, les relations de commutation de l'algèbre de Poincaré permettent d'écrire $g(a, \omega) = g(x(a, \omega), 0)g(0, \omega)$. Si l'on considère deux éléments $g(a_1, \omega_1)$ et $g(a_2, \omega_2)$ du groupe de Poincaré restreint reliés par une transformation de Lorentz, on a $x_1 = x_2$. On obtient donc une correspondance univoque entre le groupe quotient $P_+^\uparrow/L_+^\uparrow$ et l'espace des coordonnées spatio-temporelles : si $\overline{g}$ désigne un élément du groupe quotient, on a l'identification $\overline{g(a, \omega)} = \overline{g(x, 0)} \leftrightarrow \exp(ix^\mu P_\mu)$.

Considérons alors l'action à gauche d'un élément du groupe de Poincaré sur le groupe quotient $P_+^\uparrow/L_+^\uparrow$: si g_0 désigne un élément du groupe de Poincaré, l'action est définie par $\overline{g} \to \overline{g}' = \overline{g_0 g}$.
Dans une translation de vecteur b^μ, on a $\overline{g(x, 0)} \to \overline{g(b, 0)g(x, 0)} = \overline{g(x + b, 0)}$, d'où la transformation sur les coordonnées : $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + b^\mu$.
Dans une transformation de Lorentz de paramètres $\omega^{\mu\nu}$, on a $\overline{g(x, 0)} \to \overline{g(x', 0)} = \overline{g(0, \omega)g(x, 0)} = \overline{g(0, \omega)g(x, 0)g(0, -\omega)}$, la dernière égalité provenant de la définition même du groupe quotient. Compte tenu des relations de l'algèbre de Poincaré, on obtient $\overline{g(x', 0)} = \overline{g(e^\omega x, 0)}$, d'où la transformation sur les coordonnées : $x^\mu \to x'^\mu = (e^\omega)^\mu{}_\nu x^\nu$.
On retrouve donc bien l'action des transformations du groupe de Poincaré sur les coordonnées spatio-temporelles et l'espace quotient $P_+^\uparrow/L_+^\uparrow$ est isomorphe à l'espace de Minkowski.

La construction précédente se généralise dans le cas de l'algèbre de supersymétrie. Il faut déterminer pour cela l'action des générateurs de supersymétrie Q_α and $\overline{Q}^{\dot\alpha}$. On étend l'espace des coordonnées spatio-temporelles en introduisant des variables complexes anticommutantes ξ^α et $\overline{\xi}_{\dot\alpha} = (\xi_\alpha)^*$:

$$\{\xi^\alpha, \xi^\beta\} = \{\xi^\alpha, \overline{\xi}_{\dot\beta}\} = \{\overline{\xi}_{\dot\alpha}, \overline{\xi}_{\dot\beta}\} = 0 \tag{3.3.2}$$

formant avec l'élément unité une algèbre de Grassmann Γ.

L'algèbre de Grassmann Γ a une structure naturelle d'algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée : $\Gamma = \Gamma_{\overline{0}} \oplus \Gamma_{\overline{1}}$, où $\Gamma_{\overline{0}}$ (resp. $\Gamma_{\overline{1}}$) est constitué des éléments contenant un nombre pair (resp. impair) de variables ξ, ou éléments de degré $\overline{0}$ (resp. $\overline{1}$).

Si $\mathcal{A}$ désigne l'algèbre de supersymétrie, on désigne par $\mathcal{A}(\Gamma)$ l'enveloppe de Grassmann de $\mathcal{A}$ définie comme l'ensemble des combinaisons linéaires formelles $\sum_i a_i\eta_i$ où les générateurs a_i forment une base de la superalgèbre $\mathcal{A}$ et $\eta_i \in \Gamma$ tels que $\deg a_i = \deg \eta_i$. Le commutateur entre deux éléments $A = \sum_i a_i\eta_i$ et $A' = \sum_j a'_j\eta'_j$ de $\mathcal{A}(\Gamma)$ est défini naturellement par $[A, A'] = \sum_{ij} [\![a_i, a_j]\!]\eta_i\eta'_j$ où $[\![.,.]\!]$ désigne le supercommutateur dans $\mathcal{A}$. Ce commutateur confère à l'enveloppe de Grassmann $\mathcal{A}(\Gamma)$ une structure d'algèbre de Lie.

Le groupe de super-Poincaré $SP_+^\uparrow$ est défini comme l'exponentiation de l'enveloppe de Grassmann $\mathcal{A}(\Gamma)$ de l'algèbre de supersymétrie. Un élément g est donc donné par :

$$g(a^\mu, \omega^{\mu\nu}, \xi^\alpha, \overline{\xi}_{\dot\alpha}) = \exp i(a^\mu P_\mu + \tfrac{1}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu} + \xi^\alpha Q_\alpha + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha}) \tag{3.3.3}$$

Comme précédemment, les relations de commutation de l'algèbre de supersymétrie permettent d'écrire $g(a, \xi, \overline{\xi}, \omega) = g(x, \theta, \overline{\theta}, 0)\, g(0, \omega)$ où $x, \theta, \overline{\theta}$ sont des fonctions de $a, \xi, \overline{\xi}, \omega$. Par un raisonnement analogue au précédent, on obtient immédiatement une correspondance univoque entre le groupe quotient $SP_+^\uparrow/L_+^\uparrow$ et l'espace $S\mathbb{R}^4$ des "supercoordonnées", appelé "superespace" (rigide) [1] :

$$S\mathbb{R}^4 = \left\{(z^A) = (x^\mu, \theta^\alpha, \overline{\theta}_{\dot\alpha}), \overline{\theta}_{\dot\alpha} = (\theta_\alpha)^*, x^\mu \in \mathbb{R}, \theta^\alpha \in \Gamma_1\right\} \tag{3.3.4}$$

avec l'identification $\overline{g(a, \xi^\alpha, \overline{\xi}_{\dot\alpha}, \omega)} = \overline{g(x, \theta^\alpha, \overline{\theta}_{\dot\alpha}, 0)} \leftrightarrow \exp i\big(x^\mu P_\mu + \theta^\alpha Q_\alpha + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha}\big)$.

En considérant l'action à gauche d'un élément du groupe de super-Poincaré sur l'espace quotient $SP_+^\uparrow/L_+^\uparrow$, on trouve, en utilisant la formule de Baker–Campbell–Hausdorff, les expressions de l'action des transformations du groupe de super-Poincaré sur le superespace :

— Translation de vecteur b^μ

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + b^\mu \ , \quad \theta'^\alpha = \theta^\alpha \ , \quad \overline{\theta}'_{\dot\alpha} = \overline{\theta}_{\dot\alpha} \tag{3.3.5}$$

— Transformation de Lorentz de paramètres $\omega^{\mu\nu}$

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda(\omega)^\mu{}_\nu\, x^\nu \ , \quad \theta'^\alpha = \exp\big(\tfrac{1}{2}\,\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\big)\theta^\alpha \ , \quad \overline{\theta}'_{\dot\alpha} = \exp\big(\tfrac{1}{2}\,\omega^{\mu\nu}\overline{\sigma}_{\mu\nu}\big)\overline{\theta}_{\dot\alpha} \tag{3.3.6}$$

Les coordonnées anticommutantes θ^α et $\overline{\theta}_{\dot\alpha}$ du superespace se transforment donc comme des spineurs de Weyl gauches et droits respectivement.

— Transformation de supersymétrie de paramètres ξ^α, $\overline{\xi}_{\dot\alpha}$

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + i(\xi\sigma^\mu\overline{\theta} + \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta) \ , \qquad \theta'^\alpha = \theta^\alpha + \xi^\alpha \ , \qquad \overline{\theta}'_{\dot\alpha} = \overline{\theta}_{\dot\alpha} + \overline{\xi}_{\dot\alpha} \tag{3.3.7}$$

1. Le terme "rigide" se réfère au fait que les paramètres $\xi, \overline{\xi}$ des transformations de supersymétrie sont constants et donc indépendants des coordonnées spatio-temporelles. La notion de superespace $N = 1$ a été introduite par A. Salam et J. Strathdee, voir réf. [4].

3.4 Superchamps

3.4.1 Calcul intégro-différentiel dans le superespace

Les variables de Grassmann θ^α et $\overline{\theta}_{\dot\alpha}$ se contractent comme des spineurs non pointés et pointés, on a donc $\theta\theta = \theta^\alpha\theta_\alpha$ et $\overline{\theta\theta} = \overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}$. On a les identités :

$$\theta^\alpha\theta^\beta = -\tfrac{1}{2}\,\epsilon^{\alpha\beta}\theta\theta\ , \qquad \overline{\theta}^{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\beta} = \tfrac{1}{2}\,\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\theta\theta}\ , \qquad \overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}_{\dot\beta} = -\tfrac{1}{2}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\theta\theta}\ , \qquad \theta_\alpha\theta_\beta = \tfrac{1}{2}\,\epsilon_{\alpha\beta}\theta\theta \tag{3.4.1}$$

$$\theta_\alpha\overline{\theta}_{\dot\beta} = \tfrac{1}{2}\,\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}(\overline{\theta}\overline{\sigma}_\mu\theta) \qquad\qquad \overline{\theta}^{\dot\beta}\theta^\alpha = \tfrac{1}{2}\,\overline{\sigma}^{\mu\,\dot\beta\alpha}(\theta\sigma_\mu\overline{\theta}) \tag{3.4.2}$$

ainsi que

$$\begin{gathered}(\theta\xi)(\theta\chi) = -\tfrac{1}{2}\,(\theta\theta)(\xi\chi)\ , \qquad (\overline{\theta\xi})(\overline{\theta\chi}) = -\tfrac{1}{2}\,(\overline{\theta\theta})(\overline{\xi\chi})\ , \qquad (\theta\xi)(\overline{\theta\chi}) = \tfrac{1}{2}\,(\theta\sigma^\mu\overline{\theta})(\xi\sigma_\mu\overline{\chi}) \\ \overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\chi = -\chi\sigma^\mu\overline{\theta}\ , \qquad \theta\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta = -\theta\theta g^{\mu\nu}\ , \qquad \overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\theta} = -\overline{\theta\theta}g^{\mu\nu}\ , \qquad (\theta\sigma^\mu\overline{\theta})(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}) = \tfrac{1}{2}\,\theta\theta\overline{\theta\theta}g^{\mu\nu}\end{gathered} \tag{3.4.3}$$

On introduit les opérateurs de dérivation $\partial_\alpha := \dfrac{\partial}{\partial\theta^\alpha}$ et $\overline{\partial}^{\dot\alpha} := \dfrac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}}$ qui satisfont aux règles de dérivation suivantes :

$$\partial^\alpha = -\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta\ , \qquad \partial_\alpha\theta^\beta = \delta_\alpha^\beta\ , \qquad \partial^\alpha\theta^\beta = -\epsilon^{\alpha\beta}\ , \qquad \partial_\alpha\theta_\beta = -\epsilon_{\alpha\beta} \tag{3.4.4}$$

$$\overline{\partial}_{\dot\alpha} = -\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\partial}^{\dot\beta}\ , \qquad \overline{\partial}^{\dot\alpha}\overline{\theta}_{\dot\beta} = \delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}\ , \qquad \overline{\partial}_{\dot\alpha}\overline{\theta}_{\dot\beta} = -\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\ , \qquad \overline{\partial}^{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\beta} = -\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta} \tag{3.4.5}$$

$$\partial_\alpha(\theta^\beta\theta^\gamma) = \delta_\alpha^\beta\,\theta^\gamma - \delta_\alpha^\gamma\,\theta^\beta\ , \qquad\qquad \overline{\partial}^{\dot\alpha}(\overline{\theta}_{\dot\beta}\overline{\theta}_{\dot\gamma}) = \delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}\,\overline{\theta}_{\dot\gamma} - \delta^{\dot\alpha}_{\dot\gamma}\,\overline{\theta}_{\dot\beta} \tag{3.4.6}$$

ainsi que (avec $\partial^2 := \partial^\alpha\partial_\alpha$ et $\overline{\partial}^2 := \overline{\partial}_{\dot\alpha}\overline{\partial}^{\dot\alpha}$)

$$\partial_\alpha(\theta\theta) = 2\theta_\alpha\ , \qquad \partial^2(\theta\theta) = 4\ , \qquad \overline{\partial}_{\dot\alpha}(\overline{\theta\theta}) = -2\overline{\theta}_{\dot\alpha}\ , \qquad \overline{\partial}^2(\overline{\theta\theta}) = 4 \tag{3.4.7}$$

L'intégration dans le superespace fait appel à l'intégrale de Berezin. Soit θ une variable de Grassmann et f une fonction des coordonnées (x,θ). Le développement de Taylor de la fonction f s'écrit $f(x,\theta) = f_0(x) + \theta f_1(x)$. On définit l'intégrale de Berezin par les relations

$$\int d\theta\ \theta = 1\ , \qquad \int d\theta = 0\ , \qquad \int d\theta\ f(x,\theta) = f_1(x) \tag{3.4.8}$$

On en déduit les propriétés suivantes :

$$\int d(\theta+\xi)\ f(x,\theta+\xi) = \int d\theta\ f(x,\theta) \qquad \text{invariance par translation} \tag{3.4.9}$$

$$\int d\theta\ f(x,\theta) = \frac{d}{d\theta}\,f(x,\theta) \qquad \text{equivalence integration vs differentiation} \tag{3.4.10}$$

On généralise aisément au cas des variables du superespace :

$$\int d\theta_\alpha\ \theta^\beta = \delta_\alpha^\beta \qquad \text{et} \qquad \int d\overline{\theta}^{\dot\alpha}\ \overline{\theta}_{\dot\beta} = \delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta} \tag{3.4.11}$$

et on définit les mesures

$$d^2\theta = \tfrac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta}d\theta_\alpha d\theta_\beta \qquad \text{et} \qquad d^2\overline{\theta} = \tfrac{1}{4}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}d\overline{\theta}^{\dot\alpha}\ \overline{\theta}^{\dot\beta} \tag{3.4.12}$$

telles que

$$\int d^2\theta\ \theta\theta = \int d^2\overline{\theta}\ \overline{\theta\theta} = 1 \tag{3.4.13}$$

3.4.2 Définition des superchamps

On définit un *superchamp* $\mathcal{F}$ comme un champ fonction des coordonnées du superespace. Les variables θ^α et $\overline{\theta}_{\dot\alpha}$ étant des variables de Grassmann, le développement de Taylor d'un superchamp $\mathcal{F}$ dans ces variables contient un nombre fini de termes :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x,\theta,\overline{\theta}) &= f(x) + \theta\phi(x) + \overline{\theta\chi}(x) + \theta\theta m(x) + \overline{\theta\theta}n(x)\\ &\quad + \theta\sigma^\mu\overline{\theta}A_\mu(x) + \theta\theta\overline{\theta\lambda}(x) + \overline{\theta\theta}\theta\psi(x) + \theta\theta\overline{\theta\theta}d(x)\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

Génériquement, les champs $f(x)$, $m(x)$, $n(x)$ et $d(x)$ sont des champs scalaires complexes, les champs $\phi(x)$, $\psi(x)$ et $\overline{\chi}(x)$, $\overline{\lambda}(x)$ sont des spineurs de Weyl gauches et droits et le champ $A_\mu(x)$ est un champ vectoriel complexe. Ils sont appelés composantes du superchamp. Un superchamp générique $N = 1$ contient donc 16 degrés de liberté bosoniques et 16 degrés de liberté fermioniques. Il est utile de préciser les dimensions de masse des champs composants. Si Δ est la dimension de masse du champ $f(x)$, on a $\dim\phi(x),\overline{\chi}(x) = \Delta + \frac{1}{2}$, $\dim m(x), n(x), A_\mu(x) = \Delta + 1$, $\dim\psi(x),\overline{\lambda}(x) = \Delta + \frac{3}{2}$, $\dim D(x) = \Delta + 2$.

On notera la propriété importante qu'un produit de superchamps est encore un superchamp.

L'action d'une translation des coordonnées du superespace $g(a,\xi,\overline{\xi}) = \exp i(a^\mu P_\mu + \xi^\alpha Q_\alpha + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha})$ sur un superchamp $\mathcal{F}(x,\theta,\overline{\theta})$ s'écrit alors

$$\mathcal{F}(x,\theta,\overline{\theta}) \to \mathcal{F}'(x,\theta,\overline{\theta}) = g(a,\xi,\overline{\xi})\,\mathcal{F}(x,\theta,\overline{\theta})\,g(a,\xi,\overline{\xi})^{-1} \tag{3.4.15}$$

En remarquant, par analogie avec le cas des champs dans l'espace de Minkowski, que le superchamp $\mathcal{F}(x,\theta,\overline{\theta})$ peut s'écrire

$$\mathcal{F}(x,\theta,\overline{\theta}) = g(x,\theta,\overline{\theta})\,\mathcal{F}(0,0,0)\,g(x,\theta,\overline{\theta})^{-1} \tag{3.4.16}$$

où $g(x,\theta,\overline{\theta})$ désigne un élément du groupe quotient $SP_+^\uparrow/L_+^\uparrow$, on obtient en utilisant la formule de Baker–Campbell–Hausdorff et les relations de commutation de l'algèbre de supersymétrie, voir formules (3.3.5) et (3.3.7),

$$\mathcal{F}'(x,\theta,\overline{\theta}) = \mathcal{F}(x + a + i\xi\sigma\overline{\theta} + i\overline{\xi}\overline{\sigma}\theta, \theta + \xi, \overline{\theta} + \overline{\xi}) \tag{3.4.17}$$

Dans une transformation infinitésimale l'équation (3.4.15) implique

$$\delta\mathcal{F} = -i\big[\mathcal{F}(x,\theta,\overline{\theta}), a^\mu P_\mu + \xi^\alpha Q_\alpha + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha}\big] \tag{3.4.18}$$

Par ailleurs, compte tenu de (3.4.17), un développement au premier ordre de $\mathcal{F}'(x,\theta,\overline{\theta}) - \mathcal{F}(x,\theta,\overline{\theta})$ conduit à (avec $\partial_\mu := \partial/\partial x^\mu$)

$$\delta\mathcal{F} = \Big(\xi^\alpha\partial_\alpha + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{\partial}^{\dot\alpha} + \big(a^\mu + i\xi\sigma^\mu\overline{\theta} + i\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\big)\partial_\mu\Big)\,\mathcal{F}(x,\theta,\overline{\theta}) \tag{3.4.19}$$

La variation infinitésimale du superchamp $\mathcal{F} := \mathcal{F}(x,\theta,\overline{\theta})$ s'écrit donc

$$\delta\mathcal{F} = -i\big[\mathcal{F}, a^\mu P_\mu + \xi^\alpha Q_\alpha + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha}\big] = -i\big(a^\mu\mathcal{P}_\mu + \xi^\alpha\mathcal{Q}_\alpha + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{\mathcal{Q}}^{\dot\alpha}\big)\mathcal{F} \tag{3.4.20}$$

où $\mathcal{P}_\mu$, $\mathcal{Q}_\alpha$, $\overline{\mathcal{Q}}^{\dot\alpha}$ désignent les représentations des générateurs de l'algèbre de supersymétrie en termes d'opérateurs différentiels :

$$\mathcal{P}_\mu = i\,\partial_\mu\,, \qquad \mathcal{Q}_\alpha = i\big(\partial_\alpha + i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}\,\partial_\mu\big)\,, \qquad \overline{\mathcal{Q}}^{\dot\alpha} = i\big(\overline{\partial}^{\dot\alpha} + i\overline{\sigma}^{\mu\,\dot\alpha\alpha}\theta_\alpha\,\partial_\mu\big) \tag{3.4.21}$$

L'équation (3.4.20) appliquée à l'expression (3.4.14) d'un superchamp générique conduit à l'expression des variations infinitésimales des champs composants dans une transformation de supersymétrie.

Explicitement, on obtient pour une transformation de paramètre ξ (avec $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$) :

$$\begin{aligned}
\delta_\xi\, f &= \xi\phi + \overline{\xi}\overline{\chi} \\
\delta_\xi\, \phi &= 2\xi m + \sigma^\mu \overline{\xi}(A_\mu - i\partial_\mu f) \\
\delta_\xi\, \overline{\chi} &= 2\overline{\xi} n - \overline{\sigma}^\mu \xi (A_\mu + i\partial_\mu f) \\
\delta_\xi\, m &= \overline{\xi}\overline{\lambda} - \tfrac{i}{2}\,\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \phi \\
\delta_\xi\, n &= \xi\psi - \tfrac{i}{2}\,\xi\sigma^\mu \partial_\mu \overline{\chi} \\
\delta_\xi\, A_\mu &= \xi\sigma_\mu \overline{\lambda} - \overline{\xi}\overline{\sigma}_\mu \psi + \tfrac{i}{2}\,(\overline{\xi}\partial_\mu \overline{\chi} - \xi\partial_\mu \phi) - i(\xi\sigma_{\nu\mu}\partial^\nu \phi + \partial^\nu \overline{\chi}\overline{\sigma}_{\nu\mu}\overline{\xi}) \\
\delta_\xi\, \psi &= 2\xi d + \tfrac{i}{2}\,(\xi\partial^\mu A_\mu - \sigma^{\mu\nu}\xi F_{\mu\nu}) - i\sigma^\mu \overline{\xi}\partial_\mu n \\
\delta_\xi\, \overline{\lambda} &= 2\overline{\xi} d - \tfrac{i}{2}\,(\overline{\xi}\partial^\mu A_\mu - \overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\xi} F_{\mu\nu}) - i\overline{\sigma}^\mu \xi \partial_\mu m \\
\delta_\xi\, d &= -\tfrac{i}{2}\,(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + \xi\sigma^\mu \partial_\mu \overline{\lambda})
\end{aligned} \tag{3.4.22}$$

Les champs composants d'un superchamp générique forment un supermultiplet général. Un superchamp réalise donc une représentation de l'algèbre de supersymétrie. Cependant cette représentation n'est pas irréductible (un superchamp générique $N = 1$ contient 16 degrés de liberté bosoniques et 16 degrés de liberté fermioniques). Les représentations irréductibles sont obtenues en imposant des contraintes supplémentaires sur les superchamps. Ecrivant la contrainte génériquement sous la forme $\mathscr{C}\big(\mathcal{F}(x,\theta,\overline{\theta})\big) = 0$, les conditions suivantes doivent être réunies :

— La contrainte $\mathscr{C}$ (anti)commute avec l'algèbre de supersymétrie off-shell.
— L'équation de contrainte $\mathscr{C} = 0$ ne doit pas imposer directement les équations du champ.
— L'équation de contrainte $\mathscr{C} = 0$ doit posséder des solutions non nulles.

La première condition garantit que le superchamp résultant réalise encore une représentation de l'algèbre de supersymétrie off-shell. Les deux autres conditions garantissent que le superchamp reste physiquement pertinent off-shell.

Le superchamp (anti)chiral et le superchamp vectoriel constituent les deux exemples fondamentaux.

3.4.3 Dérivées covariantes

L'introduction des superchamps permet de remplacer le problème de trouver les représentations (irréductibles) de l'algèbre de supersymétrie sur les champs par celui de déterminer les contraintes $\mathscr{C}$ appropriées. Celles-ci doivent se comporter de façon covariante par rapport aux transformations de supersymétrie : pour un superchamp $\mathcal{F}$, on doit avoir dans une transformation de supersymétrie de paramètre ξ

$$\delta_\xi\,\big(\mathscr{C}(\mathcal{F})\big) = \mathscr{C}\big(\delta_\xi\,\mathcal{F}\big) \tag{3.4.23}$$

Par ailleurs, les contraintes ne doivent pas conduire à une restriction de la dépendance spatio-temporelle des superchamps. Ainsi, la contrainte $\partial_\mu \mathcal{F}(x,\theta,\overline{\theta}) = 0$ satisfait (3.4.23) mais conduit à un superchamp constant. Il faut donc considérer des dérivées spinorielles. Cependant, ni les dérivées ∂_α et $\overline{\partial}^{\dot{\alpha}}$, ni les opérateurs différentiels $\mathcal{Q}_\alpha$ et $\overline{\mathcal{Q}}^{\dot{\alpha}}$ ne satisfont la condition (3.4.23).

Une façon élégante de construire des dérivées covariantes (i.e. qui anticommutent avec $\mathcal{Q}_\alpha$ et $\overline{\mathcal{Q}}^{\dot{\alpha}}$) consiste à considérer l'action des translations dans le superespace comme des actions à droite et non pas comme des actions à gauche.
Pour l'action à gauche, on a $g(x,\theta,\overline{\theta}) \to g(x',\theta',\overline{\theta}') = g(a,\xi,\overline{\xi})\, g(x,\theta,\overline{\theta})$, avec $x'^\mu = x^\mu + a^\mu + i(\xi\sigma^\mu\overline{\theta} + \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta)$, $\theta'^\alpha = \theta^\alpha + \xi^\alpha$, $\overline{\theta}'_{\dot{\alpha}} = \overline{\theta}_{\dot{\alpha}} + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}$, d'où pour une transformation infinitésimale

$$\delta g(x,\theta,\overline{\theta}) = g(x',\theta',\overline{\theta}') - g(x,\theta,\overline{\theta}) = -i\big(a^\mu \mathcal{P}_\mu + \xi^\alpha \mathcal{Q}_\alpha + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\overline{\mathcal{Q}}^{\dot{\alpha}}\big) g(x,\theta,\overline{\theta}) \tag{3.4.24}$$

Pour l'action à droite, on a $g(x,\theta,\overline{\theta}) \to g(x',\theta',\overline{\theta}') = g(x,\theta,\overline{\theta})\, g(a,\xi,\overline{\xi})$ avec $x'^\mu = x^\mu + a^\mu - i(\xi\sigma^\mu\overline{\theta} + \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta)$, $\theta'^\alpha = \theta^\alpha + \xi^\alpha$, $\overline{\theta}'_{\dot\alpha} = \overline{\theta}_{\dot\alpha} + \overline{\xi}_{\dot\alpha}$, d'où pour une tranformation infinitésimale

$$\delta g(x,\theta,\overline{\theta}) = g(x',\theta',\overline{\theta}') - g(x,\theta,\overline{\theta}) = \big(a^\mu\mathcal{D}_\mu + \xi^\alpha\mathcal{D}_\alpha + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\big)g(x,\theta,\overline{\theta}) \tag{3.4.25}$$

Si l'on considère l'associativité du produit $g(a,\xi,\overline{\xi})\,\big[g(x,\theta,\overline{\theta})\,g(b,\eta,\overline{\eta})\big] = \big[g(a,\xi,\overline{\xi})\,g(x,\theta,\overline{\theta})\big]\,g(b,\eta,\overline{\eta})$ et que l'on applique les actions à droite ou à gauche selon les cas, on obtient alors

$$\big\{\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{Q}_\beta\big\} = 0\ , \qquad \big\{\mathcal{D}_\alpha, \overline{\mathcal{Q}}_{\dot\beta}\big\} = 0\ , \qquad \big\{\overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}, \mathcal{Q}_\beta\big\} = 0\ , \qquad \big\{\overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}, \overline{\mathcal{Q}}_{\dot\beta}\big\} = 0 \tag{3.4.26}$$

En calculant $\delta g(x,\theta,\overline{\theta})$ au premier ordre dans (3.4.25), on obtient l'expression des dérivées covariantes en termes d'opérateurs différentiels :

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu\ , \qquad \mathcal{D}_\alpha = \partial_\alpha - i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}\,\partial_\mu\ , \qquad \overline{\mathcal{D}}^{\dot\alpha} = \overline{\partial}^{\dot\alpha} - i\overline{\sigma}^{\mu\,\dot\alpha\alpha}\theta_\alpha\,\partial_\mu \tag{3.4.27}$$

ou bien

$$\mathcal{D}^\alpha = -\partial^\alpha + i\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\sigma}^{\mu\,\dot\alpha\alpha}\,\partial_\mu\ , \qquad \overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha} = -\overline{\partial}_{\dot\alpha} + i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\,\partial_\mu \tag{3.4.28}$$

On vérifie que les opérateurs $\mathcal{D}_\alpha$ et $\overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}$ satisfont l'algèbre de supersymétrie

$$\big\{\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta\big\} = 0\ , \qquad \big\{\overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}, \overline{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\big\} = 0\ , \qquad \big\{\mathcal{D}_\alpha, \overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\big\} = 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu \tag{3.4.29}$$

3.4.4 Éléments de langage

Jusqu'à présent, on a considéré les éléments du groupe quotient $SP^\uparrow_+/L^\uparrow_+$ sous la forme $g(x,\theta,\overline{\theta}) = \exp i\big(x^\mu P_\mu + \theta^\alpha Q_\alpha + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha}\big)$. Compte tenu des relations de commutation de l'algèbre de supersymétrie, on peut envisager deux autres paramétrages possibles : $g_1(x,\theta,\overline{\theta}) = \exp i\big(x^\mu P_\mu + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha}\big)\exp i\big(\theta^\alpha Q_\alpha\big)$ et $g_2(x,\theta,\overline{\theta}) = \exp i\big(x^\mu P_\mu + \theta^\alpha Q_\alpha\big)\exp i\big(\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha}\big)$. Pour relier ces trois formes, il suffit d'utiliser la formule de Baker–Campbell–Hausdorff. On trouve aisément les relations suivantes :

$$g_1(x,\theta,\overline{\theta}) = \exp i\big((x^\mu - i\theta\sigma^\mu\overline{\theta})P_\mu + \theta^\alpha Q_\alpha + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha}\big) = g(x^\mu - i\theta\sigma^\mu\overline{\theta},\theta,\overline{\theta}) \tag{3.4.30}$$

$$g_2(x,\theta,\overline{\theta}) = \exp i\big((x^\mu + i\theta\sigma^\mu\overline{\theta})P_\mu + \theta^\alpha Q_\alpha + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha}\big) = g(x^\mu + i\theta\sigma^\mu\overline{\theta},\theta,\overline{\theta}) \tag{3.4.31}$$

Le passage d'une forme à une autre s'effectue simplement par un changement de variables. Un superchamp étant donné, on peut donc le paramétrer soit avec les coordonnées $(x,\theta,\overline{\theta})$, soit avec les coordonnées $(y,\theta,\overline{\theta})$ ou encore avec les coordonnées $(y^\dagger,\theta,\overline{\theta})$, où $y^\mu = x^\mu - i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}$ et $y^{\dagger\mu} = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}$. On dit que l'on utilise le langage neutre, chiral ou antichiral respectivement.

Selon le langage utilisé, les opérateurs $\mathcal{Q}_\alpha$ et $\overline{\mathcal{Q}}_{\dot\alpha}$ et les dérivées covariantes $\mathcal{D}_\alpha$ et $\overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}$ prennent les formes suivantes (avec $\partial_\mu := \partial/\partial y^\mu$ en langage chiral et $\partial_\mu := \partial/\partial y^{\dagger\mu}$ en langage antichiral !) :

Langage	$\mathcal{Q}_\alpha$	$\overline{\mathcal{Q}}_{\dot\alpha}$	$\mathcal{D}_\alpha$	$\overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}$
neutre	$i\big(\partial_\alpha + i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}\,\partial_\mu\big)$	$-\,i\big(\overline{\partial}_{\dot\alpha} + i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\,\partial_\mu\big)$	$\partial_\alpha - i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}\,\partial_\mu$	$-\,\overline{\partial}_{\dot\alpha} + i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\,\partial_\mu$
chiral	$i\partial_\alpha$	$-\,i\big(\overline{\partial}_{\dot\alpha} + 2i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\,\partial_\mu\big)$	$\partial_\alpha - 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}\,\partial_\mu$	$-\,\overline{\partial}_{\dot\alpha}$
antichiral	$i\big(\partial_\alpha + 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}\,\partial_\mu\big)$	$-\,i\,\overline{\partial}^{\dot\alpha}$	∂_α	$-\,\overline{\partial}_{\dot\alpha} + 2i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\,\partial_\mu$

3.5 Le superchamp chiral

Un superchamp Φ est appelé *superchamp chiral* s'il satisfait la contrainte

$$\overline{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\Phi(x,\theta,\overline{\theta}) = 0 \tag{3.5.1}$$

Pour résoudre cette contrainte, le plus simple est de se placer en langage chiral : le superchamp Φ est alors exprimé en termes des variables $(y,\theta,\overline{\theta})$ et la dérivée covariante s'écrit $\overline{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} = -\overline{\partial}_{\dot{\alpha}}$. La résolution de cette contrainte implique donc simplement que le superchamp Φ ne dépend que des coordonnées $y^\mu = x^\mu - i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}$ et θ en langage chiral. On peut donc écrire (le facteur $\sqrt{2}$ est conventionnel)

$$\Phi(y,\theta) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \tag{3.5.2}$$

Dans une transformation de supersymétrie de paramètre infinitésimal ξ, le superchamp chiral Φ se transforme selon $\delta_\xi\,\Phi = -i(\xi\mathcal{Q} + \overline{\xi\mathcal{Q}})\Phi$ où $\mathcal{Q}$ et $\overline{\mathcal{Q}}$ sont donnés par leurs expressions en langage chiral (voir tableau ci-dessus). On obtient

$$\begin{aligned} \delta_\xi\,\phi &= \sqrt{2}\,\xi\psi \\ \delta_\xi\,\psi &= \sqrt{2}\,\xi F - i\sqrt{2}\,\sigma^\mu\overline{\xi}\partial_\mu\phi \\ \delta_\xi\,F &= -i\sqrt{2}\,\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

Les champs (ϕ,ψ,F) forment le supermultiplet chiral.

En développant l'expression (3.5.2) en langage neutre, i.e. en termes des variables $(x,\theta,\overline{\theta})$, le superchamp chiral s'écrit

$$\Phi(x,\theta,\overline{\theta}) = \phi(x) + \sqrt{2}\,\theta\psi(x) + \theta\theta F(x) - i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu\phi(x) - \tfrac{i}{\sqrt{2}}\,\theta\theta\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) - \tfrac{1}{4}\,\theta\theta\overline{\theta\theta}\,\partial^2\phi(x) \tag{3.5.4}$$

On définit de même un *superchamp antichiral* $\Phi^\dagger$ par la contrainte

$$\mathcal{D}_\alpha\Phi^\dagger(x,\theta,\overline{\theta}) = 0 \tag{3.5.5}$$

On se place maintenant en langage antichiral, où le superchamp $\Phi^\dagger$ s'exprime en termes des variables $(y^\dagger,\theta,\overline{\theta})$, et dans lequel la dérivée covariante s'écrit $\mathcal{D}_\alpha = \partial_\alpha$. La résolution de cette contrainte implique donc simplement que le superchamp $\Phi^\dagger$ ne dépend que des coordonnées ${y^\dagger}^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}$ et $\overline{\theta}$ en langage antichiral. On peut donc écrire

$$\Phi^\dagger(y^\dagger,\overline{\theta}) = \phi^*(y^\dagger) + \sqrt{2}\overline{\theta\psi}(y^\dagger) + \overline{\theta\theta}F^*(y^\dagger) \tag{3.5.6}$$

De la même façon, le superchamp antichiral $\Phi^\dagger$ se transforme selon $\delta_\xi\,\Phi^\dagger = -i(\xi\mathcal{Q} + \overline{\xi\mathcal{Q}})\Phi^\dagger$ où $\mathcal{Q}$ et $\overline{\mathcal{Q}}$ sont donnés par leurs expressions en langage antichiral. On obtient

$$\begin{aligned} \delta_\xi\,\phi^* &= \sqrt{2}\,\overline{\xi\psi} \\ \delta_\xi\,\overline{\psi} &= \sqrt{2}\,\overline{\xi}F^* + i\sqrt{2}\,\xi\sigma^\mu\partial_\mu\phi^* \\ \delta_\xi\,F^* &= -i\sqrt{2}\,\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi} \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

Les champs $(\phi^*,\overline{\psi},F^*)$ forment le supermultiplet antichiral.

En développant l'expression (3.5.6) en langage neutre, le superchamp chiral s'écrit en termes des variables $(x,\theta,\overline{\theta})$

$$\Phi(x,\theta,\overline{\theta}) = \phi^*(x) + \sqrt{2}\,\overline{\theta\psi}(x) + \overline{\theta\theta}F^*(x) + i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu\phi^*(x) - \tfrac{i}{\sqrt{2}}\,\overline{\theta\theta}\theta\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi}(x) - \tfrac{1}{4}\,\theta\theta\overline{\theta\theta}\,\partial^2\phi^*(x) \tag{3.5.8}$$

Les contraintes de définition d'un superchamp chiral ou antichiral s'expriment au moyen des dérivées covariantes $\mathcal{D}_\alpha$ et $\overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}$, elles commutent donc avec les transformations de supersymétrie. La nature chirale ou antichirale d'un superchamp est conservée par une transformation de supersymétrie.

Remarques

1. Considérons deux superchamps chiraux $\Phi_i(y,\theta) = \phi_i(y) + \sqrt{2}\theta\psi_i(y) + \theta\theta F_i(y)$ et $\Phi_j(y,\theta) = \phi_j(y)+\sqrt{2}\theta\psi_j(y)+\theta\theta F_j(y)$. Alors le produit $\Phi_i\Phi_j$ est encore un superchamp chiral : $\Phi_i\Phi_j(y,\theta) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y)$ avec $\phi = \phi_i\phi_j$, $\psi = \psi_i\phi_j + \phi_i\psi_j$ et $F = F_i\phi_j + \phi_i F_j - \psi_i\psi_j$.
   De même, le produit de superchamps antichiraux est encore un superchamp antichiral.
   On vérifie cependant que le produit d'un superchamp chiral par un superchamp antichiral n'est ni chiral ni antichiral (on obtient en fait un superchamp générique réel).
2. Considérons un superchamp $\mathcal{F}$ générique donné par l'expression (3.4.14).
   En langage chiral, on a $\overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha} = -\overline{\partial}_{\dot\alpha}$ et $\overline{\mathcal{D}}^{\dot\alpha} = \overline{\partial}^{\dot\alpha}$, d'où
   $$\overline{\mathcal{D}}\overline{\mathcal{D}}\mathcal{F} = \overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\overline{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\mathcal{F} = -\overline{\partial}_{\dot\alpha}\overline{\partial}^{\dot\alpha}\mathcal{F} = -4\big(n(x) + \theta\psi(x) + \theta\theta d(x)\big) \tag{3.5.9}$$
   De même, en langage antichiral, on a $\mathcal{D}_\alpha = -\partial_\alpha$ et $\mathcal{D}^\alpha = \partial^\alpha$, d'où
   $$\mathcal{D}\mathcal{D}\mathcal{F} = \mathcal{D}^\alpha\mathcal{D}_\alpha\mathcal{F} = -\partial^\alpha\partial_\alpha\mathcal{F} = -4\big(m(x) + \overline{\theta}\overline{\chi}(x) + \overline{\theta}\overline{\theta}d(x)\big) \tag{3.5.10}$$
   On en déduit la propriété suivante : *si $\mathcal{F}$ est un superchamp quelconque, les superchamps $\overline{\mathcal{D}}\overline{\mathcal{D}}\mathcal{F}$ et $\mathcal{D}\mathcal{D}\mathcal{F}$ sont des superchamps respectivement chiraux et antichiraux.*

3.6 Le superchamp vectoriel

Un superchamp $\mathcal{V}$ est appelé *superchamp vectoriel* s'il satisfait la contrainte

$$\mathcal{V}(x,\theta,\overline{\theta}) = \mathcal{V}^\dagger(x,\theta,\overline{\theta}) \tag{3.6.1}$$

Un superchamp vectoriel peut toujours s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(x,\theta,\overline{\theta}) = {} & C(x) + i\theta\chi(x) - i\overline{\theta}\overline{\chi}(x) + \tfrac{i}{2}\,\theta\theta M(x) - \tfrac{i}{2}\,\overline{\theta}\overline{\theta}M^*(x) + \theta\sigma^\mu\overline{\theta}A_\mu(x)\\ & + \theta\theta\overline{\theta}\big(i\overline{\lambda}(x) + \tfrac{1}{2}\,\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x)\big) - \overline{\theta}\overline{\theta}\theta\big(i\lambda(x) + \tfrac{1}{2}\,\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}(x)\big)\\ & + \tfrac{1}{2}\,\theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta}\big(D(x) + \tfrac{1}{2}\,\partial_\mu\partial^\mu C(x)\big)\end{aligned} \tag{3.6.2}$$

où les champs C et D sont des champs scalaires réels, M est un champ scalaire complexe, A_μ est un champ vectoriel réel, χ et λ sont des champs spinoriels. Un superchamp vectoriel contient donc huit composantes bosoniques et huit composantes fermioniques et ne décrit pas encore un supermultiplet.

Dans une transformation de supersymétrie de paramètre infinitésimal ξ, le superchamp vectoriel $\mathcal{V}$ se transforme selon $\delta_\xi\,\mathcal{V} = -i(\xi\mathcal{Q} + \overline{\xi}\overline{\mathcal{Q}})$ où $\mathcal{Q}$ et $\overline{\mathcal{Q}}$ sont donnés par (3.4.21). Par identification de l'expression obtenue avec l'expression de $\delta_\xi\,\mathcal{V}$ en termes des variations des champs composants, on obtient les équations de transformation des composantes du superchamp vectoriel :

$$\begin{aligned}\delta_\xi\,C &= i(\chi\xi - \overline{\chi}\overline{\xi})\\ \delta_\xi\,\chi &= 2\xi M + \sigma^\mu\overline{\xi}(A_\mu - i\partial_\mu C)\\ \delta_\xi\,M &= \overline{\xi}\overline{\lambda}\\ \delta_\xi\,A_\mu &= \xi\sigma_\mu\overline{\lambda} - \overline{\xi}\overline{\sigma}_\mu\lambda + \xi\partial_\mu\chi + \overline{\xi}\partial_\mu\overline{\chi}\\ \delta_\xi\,\lambda &= 2\xi D - \tfrac{1}{2}\,\sigma^{\mu\nu}\xi F_{\mu\nu}\\ \delta_\xi\,D &= i(\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda} + \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda)\end{aligned} \tag{3.6.3}$$

Sous-multiplets du multiplet vectoriel. Les champs composants λ, $F_{\mu\nu}$ et D se transforment entre eux et forment donc un sous-multiplet du multiplet vectoriel, appelé multiplet rotationnel. Il contient 4 degrés de liberté bosoniques et 4 degrés de liberté fermioniques. Ce sous-multiplet est irréductible. On notera cependant que son complémentaire dans $\mathcal{V}$ ne forme pas un sous-multiplet. Ainsi le multiplet vectoriel est réductible mais pas complètement réductible. Cette particularité est caractéristique des théories supersymétriques.

Jauge de Wess–Zumino. On notera que si Φ désigne un superchamp chiral donné par (3.5.4) et $\Phi^\dagger$ son conjugué antichiral donné par (3.5.8), les champs $\Phi + \Phi^\dagger$ et $i(\Phi - \Phi^\dagger)$ sont des superchamps vectoriels par construction. On a (en langage neutre)

$$\begin{aligned}
\Phi + \Phi^\dagger &= \phi + \phi^* + \sqrt{2}\,\theta\psi + \sqrt{2}\,\overline{\theta\psi} + \theta\theta F + \overline{\theta\theta} F^* - i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu(\phi - \phi^*) \\
&\quad - \tfrac{i}{\sqrt{2}}\,\theta\theta\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi - \tfrac{i}{\sqrt{2}}\,\overline{\theta\theta}\theta\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi} - \tfrac{1}{4}\,\theta\theta\overline{\theta\theta}\,\partial^2(\phi + \phi^*) \qquad (3.6.4) \\
i(\Phi - \Phi^\dagger) &= i(\phi - \phi^*) + i\sqrt{2}\,(\theta\psi - \overline{\theta\psi}) + i\theta\theta F - i\overline{\theta\theta} F^* + \theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu(\phi + \phi^*) \\
&\quad + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,\theta\theta\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{\theta\theta}\theta\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi} - \tfrac{i}{4}\,\theta\theta\overline{\theta\theta}\,\partial^2(\phi - \phi^*) \qquad (3.6.5)
\end{aligned}$$

On note que la composante $\theta\sigma^\mu\overline{\theta}$, qui correspond au champ composant vecteur dans un superchamp générique, est égale à une dérivée totale d'un champ scalaire réel.

La comparaison des coefficients du terme en $\theta\sigma^\mu\overline{\theta}$ dans les expressions de $\mathcal{V}$ et de $i(\Phi - \Phi^\dagger)$ justifie alors la généralisation supersymétrique d'une transformation de jauge du superchamp vectoriel par

$$\mathcal{V} \to \mathcal{V}' = \mathcal{V} + i(\Phi - \Phi^\dagger) \qquad (3.6.6)$$

Dans une telle transformation, on a

$$\begin{array}{lll}
C \to C + i(\phi - \phi^*) & A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu(\phi + \phi^*) & \lambda \to \lambda \\
\chi \to \chi + \sqrt{2}\psi & M \to M + 2F & D \to D
\end{array} \qquad (3.6.7)$$

Ces équations montrent qu'il est possible, par un choix adéquat du superchamp chiral Φ, d'annuler les champs composants C, M, N et χ du superchamp vectoriel, les champs composants λ et D restant invariants. Un tel choix de jauge est appelé *jauge de Wess–Zumino*, dans laquelle le superchamp vectoriel prend alors la forme

$$\mathcal{V}_{WZ}(x, \theta, \overline{\theta}) = \theta\sigma^\mu\overline{\theta}A_\mu(x) + i\theta\theta\overline{\theta\lambda}(x) - i\overline{\theta\theta}\theta\lambda(x) + \tfrac{1}{2}\,\theta\theta\overline{\theta\theta}D(x) \qquad (3.6.8)$$

Les degrés de liberté d'un superchamp vectoriel comportent donc le tenseur de Maxwell $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, le spineur $\lambda(x)$ (appelé gaugino) et le champ auxiliaire $D(x)$. L'invariance de jauge résiduelle est l'invariance de jauge usuelle $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu a$ où $a(x)$ est un champ scalaire réel. On notera cependant que la décomposition (3.6.8) est brisée par une transformation de supersymétrie (voir chapitre suivant).

Dans la jauge de WZ, les puissances successives du superchamp vectoriel s'écrivent

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{WZ}^2 &= \left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}A_\mu\right)\left(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}A_\nu\right) = \tfrac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta\theta}A^\mu A_\mu \\
\mathcal{V}_{WZ}^3 &= 0
\end{aligned}$$

On en déduit que la quantité $e^{\mathcal{V}_{WZ}}$ a un développement en série comportant un nombre fini de termes. On obtient en fonction des champs composants :

$$e^{\mathcal{V}_{WZ}}(x, \theta, \overline{\theta}) = 1 + \theta\sigma^\mu\overline{\theta}A_\mu + i\theta\theta\overline{\theta\lambda} - i\overline{\theta\theta}\theta\lambda + \tfrac{1}{2}\,\theta\theta\overline{\theta\theta}(D + \tfrac{1}{2}\,A^\mu A_\mu) \qquad (3.6.9)$$

4. Théorie des champs supersymétrique

4.1 Lagrangien en superespace

Dans le chapitre précédent ont été présentées les notions de superespace et de superchamp qui permettent d'obtenir des représentations de l'algèbre de supersymétrie sur les champs. De plus, les représentations irréductibles sont obtenues par des équations de contrainte sur les superchamps, dont la compatibilité avec la supersymétrie est assurée par l'utilisation de dérivées covariantes. Ce sont donc les caractéristiques cinématiques des champs dans le superespace qui ont été étudiées. Il s'agit maintenant de s'intéresser à l'aspect dynamique, c'est-à-dire de construire des actions manifestement supersymétriques afin d'obtenir explicitement des théories des champs supersymétriques dans le formalisme du superespace.

Pour que les équations du mouvement soient covariantes dans une transformation de supersymétrie, l'intégrale d'action doit être un invariant :

$$\begin{aligned}\delta_{\xi,\bar{\xi}} \int dx\, \mathcal{L}(x,\theta,\overline{\theta}) &= -i \int dx\, (\xi \mathcal{Q} + \overline{\xi \mathcal{Q}}) \mathcal{L}(x,\theta,\overline{\theta}) \\ &= \xi^{\alpha} \partial_{\alpha} \int dx\, \mathcal{L}(x,\theta,\overline{\theta}) + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}} \overline{\partial}^{\dot{\alpha}} \int dx\, \mathcal{L}(x,\theta,\overline{\theta}) + \text{termes de surface} = 0 \qquad (4.1.1)\end{aligned}$$

L'action sera invariante si elle est indépendante des variables de Grassmann θ et $\overline{\theta}$. Tout terme dépendant de θ ou $\overline{\theta}$ dans la densité lagrangienne doit par conséquent avoir la forme d'une divergence spatio-temporelle. Une observation clé est qu'une telle forme peut être obtenue en appliquant les dérivées covariantes $\mathcal{D}_{\alpha}$ et $\overline{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}$ un nombre suffisant de fois : quatre pour un superchamp générique ou vectoriel et deux pour un superchamp chiral ou antichiral.

On notera que la différentiation et l'intégration sont des opérations équivalentes pour les variables de Grassmann. On obtient donc des actions invariantes (ou des densités lagrangiennes indépendantes des variables θ et $\overline{\theta}$ à des dérivées spatio-temporelles près) par intégration des superchamps sur les coordonnées du superespace (ou sur les variables de Grassmann).

Ainsi, on a pour un superchamp chiral Φ (et son complexe conjugué $\Phi^{\dagger}$)

$$\begin{aligned}-\tfrac{1}{4}\mathcal{D}^2\Phi\big|_0 &= -\tfrac{1}{4}\mathcal{D}^{\alpha}\mathcal{D}_{\alpha}\Phi\big|_0 = \Phi\big|_{\theta\theta} = \int d^2\theta\ \Phi = F(x) \\ -\tfrac{1}{4}\overline{\mathcal{D}}^2\Phi^{\dagger}\big|_0 &= -\tfrac{1}{4}\overline{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\overline{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}}\Phi^{\dagger}\big|_0 = \Phi^{\dagger}\big|_{\overline{\theta\theta}} = \int d^2\overline{\theta}\ \Phi^{\dagger} = F^{\dagger}(x)\end{aligned} \qquad (4.1.2)$$

De même, pour un superchamp vectoriel $\mathcal{V}$

$$\tfrac{1}{16}\mathcal{D}^2\overline{\mathcal{D}}^2\mathcal{V}\big|_0 = \tfrac{1}{16}\mathcal{D}^{\alpha}\mathcal{D}_{\alpha}\overline{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\overline{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}}\mathcal{V}\big|_0 = \mathcal{V}\big|_{\theta\theta\overline{\theta\theta}} = \int d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\ \mathcal{V} = D(x) \qquad (4.1.3)$$

En résumé, une densité lagrangienne d'une théorie des champs supersymétrique consiste en deux types de termes :
– les "termes D" issus d'un superchamp vectoriel $\mathcal{V}$

$$\mathcal{L}_D = \int d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\ \mathcal{V}(x,\theta,\overline{\theta}) \qquad (4.1.4)$$

– les "termes F" issus d'un superchamp chiral Φ et son complexe conjugué $\Phi^\dagger$

$$\mathcal{L}_F = \int d^2\theta\ \Phi(x,\theta,\overline{\theta}) + \int d^2\overline{\theta}\ \Phi^\dagger(x,\theta,\overline{\theta}) \tag{4.1.5}$$

4.2 Lagrangien des superchamps chiraux

On s'intéresse ici à la forme du lagrangien d'une théorie ne contenant que des superchamps chiraux Φ_i et leurs conjugués $\Phi_i^\dagger$ sans interaction de jauge. Les deux parties de la densité lagrangienne s'écrivent

$$\mathcal{L}_K = \int d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\ K(\Phi_i, \Phi_i^\dagger) \tag{4.2.1}$$

$$\mathcal{L}_I = \int d^2\theta\ W(\Phi_i) + \int d^2\overline{\theta}\ W(\Phi_i^\dagger) \tag{4.2.2}$$

Le terme $K(\Phi_i, \Phi_i^\dagger)$, appelé *potentiel de Kähler*, décrit le terme cinétique de la densité lagrangienne. Il doit avoir une dimension de masse égale à 2 (la mesure d'intégration $d^2\theta\, d^2\overline{\theta}$ a une dimension de masse égale à 2). Il est donné par $K(\Phi_i, \Phi_i^\dagger) = \Phi_i^\dagger\Phi_i$. Le terme D d'un tel potentiel est donné par

$$\begin{aligned}\Phi_i^\dagger\Phi_i\big|_{\theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta}} &= -\tfrac{1}{4}\left((\partial^2\phi_i^\dagger)\phi_i + \phi_i^\dagger\partial^2\phi_i\right) + \tfrac{1}{2}\,\partial_\mu\phi_i^\dagger\partial^\mu\phi_i + \tfrac{i}{2}\,\psi_i\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi}_i - \tfrac{i}{2}\,\partial_\mu\psi_i\sigma^\mu\overline{\psi}_i + F_i^\dagger F_i \\ &= \partial_\mu\phi_i^\dagger\partial^\mu\phi_i + \tfrac{i}{2}\left(\psi_i\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi}_i - \partial_\mu\psi_i\sigma^\mu\overline{\psi}_i\right) + F_i^\dagger F_i + \text{dérivée totale}\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

On reconnaît les termes cinétiques de la densité lagrangienne d'un champ scalaire complexe et d'un couple de spineurs gauche et droit, à une dérivée totale près donnant un terme de surface dans l'action, ainsi qu'un terme de champ auxiliaire.

Le terme $W(\Phi_i)$, appelé *superpotentiel*, comporte les termes de masse et le terme d'interaction entre les superchamps chiraux. Il doit avoir une dimension de masse égale à 3 (la mesure d'intégration $d^2\theta$ a une dimension de masse égale à 1). L'expression la plus générale du superpotentiel (renormalisable) s'écrit

$$W(\Phi_i) = f_i\,\Phi_i + \tfrac{1}{2}\,m_{ij}\,\Phi_i\Phi_j + \tfrac{1}{3}\,g_{ijk}\,\Phi_i\Phi_j\Phi_k \tag{4.2.4}$$

où les paramètres m_{ij} et g_{ijk} sont symétriques dans les indices.
En composantes, on obtient

$$\begin{aligned}\int d^2\theta\ W(\Phi_i) = {}& f_i\,F_i + \tfrac{1}{2}\,m_{ij}\big(\phi_iF_j + F_i\phi_j - \psi_i\psi_j\big) \\ &+ \tfrac{1}{3}\,g_{ijk}\big(F_i\phi_j\phi_k + \phi_iF_j\phi_k + \phi_i\phi_jF_k - \phi_i\psi_j\psi_k - \psi_i\phi_j\psi_k - \psi_i\psi_j\phi_k\big)\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

La densité lagrangienne totale s'écrit donc

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\ \Phi_i^\dagger\Phi_i + \int d^2\theta\ W(\Phi_i) + \int d^2\overline{\theta}\ W(\Phi_i^\dagger) \tag{4.2.6}$$

Les champs auxiliaires F_i peuvent être éliminés via les équations du mouvement :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_i} &= F_i^\dagger + \frac{\partial W}{\partial\Phi_i}\bigg|_{\Phi_i=\phi_i} = F_i^\dagger + f_i + m_{ij}\,\phi_j + g_{ijk}\,\phi_j\phi_k = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_i^\dagger} &= F_i + \frac{\partial W^\dagger}{\partial\Phi_i^\dagger}\bigg|_{\Phi_i^\dagger=\phi_i^\dagger} = F_i + f_i^\dagger + m_{ij}^*\,\phi_j^\dagger + g_{ijk}^*\,\phi_j^\dagger\phi_k^\dagger = 0\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Après substitution des champs F_i par leur expression issue des équations du mouvement, on obtient la densité lagrangienne en fonction des champs physiques ϕ_i et ψ_i et leurs conjugués :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \partial_\mu \phi_i^\dagger \partial^\mu \phi_i + \tfrac{i}{2}\left(\psi_i \sigma^\mu \partial_\mu \overline{\psi}_i - \partial_\mu \psi_i \sigma^\mu \overline{\psi}_i\right) - \tfrac{1}{2}\, m_{ij}\left(\psi_i\psi_j + \overline{\psi}_i\overline{\psi}_j\right) \\ - \tfrac{1}{3}\, g_{ijk}\left(\phi_i\psi_j\psi_k + \psi_i\phi_j\psi_k + \psi_i\psi_j\phi_k + \phi_i^\dagger\overline{\psi}_j\overline{\psi}_k + \overline{\psi}_i\phi_j^\dagger\overline{\psi}_k + \overline{\psi}_i\overline{\psi}_j\phi_k^\dagger\right) - V(\phi_i, \phi_i^\dagger)\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

où le potentiel scalaire $V(\phi_i, \phi_i^\dagger)$ est donné par

$$V = F_i^\dagger F_i = \sum_i \left|\frac{\partial W}{\partial \Phi_i}\right|^2_{\Phi_i = \phi_i} = \sum_i \left|(f_i + m_{ij}\,\phi_j + g_{ijk}\,\phi_j\phi_k)\right|^2 \tag{4.2.9}$$

On notera que le potentiel scalaire est défini positif. Cette propriété aura des conséquences importantes dans la discussion de la brisure spontanée de la supersymétrie.

L'équation (4.2.8) représente la densité lagrangienne supersymétrique renormalisable la plus générale pour des supermultiplets chiraux et antichiraux. Elle contient tous les types de couplages attendus d'une théorie quantique des champs renormalisable contenant des champs scalaires et des spineurs : tadpoles scalaires, termes de masses pour les champs scalaires et les spineurs, self-interactions cubiques et quartiques entre les champs scalaires, couplages de Yukawa. Cependant les différents couplages ne sont pas tous indépendants, la supersymétrie impose notamment des relations entre les masses des scalaires et des spineurs ainsi qu'entre les interactions quartiques et les couplages de Yukawa, ce qui contraint fortement le lagrangien.

4.3 Théorie de jauge abélienne supersymétrique

On considère un superchamp vectoriel $\mathcal{V}$ dont l'expression dans la jauge de Wess–Zumino est donnée par (3.6.8). Cependant, comme le montrent les relations (3.6.3), cette jauge n'est pas préservée par les transformations de supersymétrie. Un superchamp vectoriel contient donc nécessairement un certain nombre de champs superflus. Néanmoins, la jauge de Wess–Zumino rend manifeste les degrés de liberté du modèle : le tenseur de Maxwell $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, le spineur λ et le champ auxiliaire D.

On a vu au chapitre précédent que les champs λ, $F_{\mu\nu}$ et D formaient un sous-multiplet irréductible du multiplet vectoriel. En fait, il est possible de construire à partir de $\mathcal{V}$, deux superchamps W_α et $\overline{W}^{\dot\alpha}$ dont les champs spinoriels λ_α et $\overline{\lambda}^{\dot\alpha}$ forment les champs composants de dimension minimale :

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -\tfrac{1}{4}\,\overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\overline{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\mathcal{D}_\alpha\mathcal{V} \\ \overline{W}^{\dot\alpha} &= -\tfrac{1}{4}\,\mathcal{D}^\alpha\mathcal{D}_\alpha\overline{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\mathcal{V}\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Puisque $\mathcal{D}^3 = 0$ et $\overline{\mathcal{D}}^3 = 0$, on en déduit immédiatement que le superchamp W_α (resp. $\overline{W}^{\dot\alpha}$) est *chiral* (reps. *antichiral*) :

$$\overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}W_\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}_\alpha\overline{W}^{\dot\alpha} = 0 \tag{4.3.2}$$

On notera que W_α et $\overline{W}^{\dot\alpha}$ ne sont pas des superchamps chiraux quelconques car ils satisfont de plus la contrainte

$$\mathcal{D}^\alpha W_\alpha = \overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha} \tag{4.3.3}$$

qui exprime le caractère réel du champ auxiliaire D.

Les superchamps W_α et $\overline{W}^{\dot\alpha}$ sont aussi *invariants de jauge*. En effet, dans une transformation de jauge supersymétrique $\mathcal{V} \to \mathcal{V} + i(\Phi - \Phi^\dagger)$, on a

$$\begin{aligned} W_\alpha \to W'_\alpha &= W_\alpha - \tfrac{i}{4}\,\overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\overline{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\mathcal{D}_\alpha(\Phi - \Phi^\dagger) \\ &= W_\alpha - \tfrac{i}{4}\,\overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\overline{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\mathcal{D}_\alpha\Phi \\ &= W_\alpha + \tfrac{i}{4}\,\overline{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\big(\{\overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}, \mathcal{D}_\alpha\}\Phi - \mathcal{D}_\alpha\overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\Phi\big) \\ &= W_\alpha - \tfrac{1}{2}\,\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\,\overline{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\partial_\mu\Phi \\ &= W_\alpha \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

et de même de façon similaire pour $\overline{W}^{\dot\alpha}$.

Pour calculer les expressions de W_α et $\overline{W}^{\dot\alpha}$, le plus simple est donc de se placer dans la jauge de Wess–Zumino et de prendre le langage adapté à chaque étape du calcul.

Calcul de W_α. On se place en langage chiral (variables $y^\mu = x^\mu - i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}, \theta, \overline{\theta}$). Le champ vectoriel $\mathcal{V}$ s'écrit dans la jauge de Wess–Zumino

$$\mathcal{V}_{WZ}(y,\theta,\overline{\theta}) = \theta\sigma^\mu\overline{\theta}A_\mu(y) + i\theta\theta\overline{\theta}\overline{\lambda}(y) - i\overline{\theta}\overline{\theta}\theta\lambda(y) + \tfrac{1}{2}\,\theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta}\big(D(y) + i\partial_\mu A^\mu(y)\big) \tag{4.3.5}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\alpha\mathcal{V}_{WZ}(y,\theta,\overline{\theta}) &= \big(\partial_\alpha - 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}\,\partial_\mu\big)\mathcal{V}_{WZ}(y,\theta,\overline{\theta}) \\ &= \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\,\overline{\theta}^{\dot\alpha}A_\mu + 2i\theta_\alpha\overline{\theta}\overline{\lambda} - i\overline{\theta}\overline{\theta}\lambda_\alpha + \overline{\theta}\overline{\theta}\big(\delta_\alpha^\beta D + (\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta F_{\mu\nu}\big)\theta_\beta - \theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta}\,\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\,\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot\alpha} \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Compte tenu du fait qu'en langage chiral $\overline{\mathcal{D}}\overline{\mathcal{D}}\,\overline{\theta}\overline{\theta} = -4$, on obtient finalement

$$W_\alpha(y,\theta,\overline{\theta}) = -i\lambda_\alpha(y) + \theta_\alpha D(y) + (\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta\theta_\beta F_{\mu\nu}(y) - \theta\theta\,\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\,\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot\alpha}(y) \tag{4.3.7}$$

Calcul de $\overline{W}^{\dot\alpha}$. De même, en langage antichiral (variables $y^{\dagger\mu} = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}, \theta, \overline{\theta}$ et $\overline{\theta}$), le champ vectoriel $\mathcal{V}$ s'écrit dans la jauge de Wess–Zumino

$$\mathcal{V}_{WZ}(y^\dagger,\theta,\overline{\theta}) = \theta\sigma^\mu\overline{\theta}A_\mu(y^\dagger) + i\theta\theta\overline{\theta}\overline{\lambda}(y^\dagger) - i\overline{\theta}\overline{\theta}\theta\lambda(y^\dagger) + \tfrac{1}{2}\,\theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta}\big(D(y^\dagger) - i\partial_\mu A^\mu(y^\dagger)\big) \tag{4.3.8}$$

On a

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\mathcal{V}_{WZ}(y,\theta,\overline{\theta}) &= \big(\overline{\partial}^{\dot\alpha} - 2i\overline{\sigma}^{\mu\,\dot\alpha\alpha}\theta_\alpha\,\partial_\mu\big)\mathcal{V}_{WZ}(y,\theta,\overline{\theta}) \\ &= -\overline{\sigma}^{\mu\,\dot\alpha\alpha}\,\theta_\alpha A_\mu + 2i\overline{\theta}^{\dot\alpha}\theta\lambda + i\theta\theta\overline{\lambda}^{\dot\alpha} - \theta\theta\big(\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}D + (\overline{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}F_{\mu\nu}\big)\overline{\theta}^{\dot\beta} + \theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta}\,\overline{\sigma}^{\mu\,\dot\alpha\alpha}\,\partial_\mu\lambda_\alpha \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Compte tenu du fait qu'en langage antichiral $\mathcal{D}\mathcal{D}\,\theta\theta = -4$, on obtient maintenant

$$\overline{W}^{\dot\alpha}(y^\dagger,\theta,\overline{\theta}) = i\overline{\lambda}^{\dot\alpha}(y^\dagger) - \overline{\theta}^{\dot\alpha}D(y^\dagger) + (\overline{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}F_{\mu\nu}(y^\dagger) + \overline{\theta}\overline{\theta}\,\overline{\sigma}^{\mu\,\dot\alpha\alpha}\,\partial_\mu\lambda_\alpha(y^\dagger) \tag{4.3.10}$$

Lagrangien du superchamp vectoriel. Le superchamp W_α (reps. $\overline{W}^{\dot\alpha}$) étant un superchamp chiral (reps. antichiral), la densité lagrangienne du champ vectoriel libre *invariant de jauge* s'écrit sous la forme

$$\mathcal{L}_V = \tfrac{1}{4}\big(W^\alpha W_\alpha\big|_{\theta\theta} + \overline{W}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}\big|_{\overline{\theta}\overline{\theta}}\big) = \tfrac{1}{4}\int d^2\theta\; W^\alpha W_\alpha + \tfrac{1}{4}\int d^2\overline{\theta}\;\overline{W}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha} \tag{4.3.11}$$

Le champ W_α étant chiral, il en est de même de $W^\alpha W_\alpha$ et on a $W^\alpha W_\alpha(y)\big|_{\theta\theta} = W^\alpha W_\alpha(x)\big|_{\theta\theta}$. On a donc en *langage neutre* :

$$W^\alpha W_\alpha\big|_{\theta\theta} = i\lambda^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot\alpha} + D^2 + \tfrac{1}{2}\,\epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\delta}(\sigma^{\mu\nu})_\gamma{}^\beta(\sigma^{\rho\sigma})_\alpha{}^\delta F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} - i\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot\alpha}\overline{\sigma}^\mu_{\dot\alpha\alpha}\lambda^\alpha \tag{4.3.12}$$

où l'on a utilisé $W^\alpha W_\alpha = \epsilon^{\alpha\gamma}W_\gamma W_\alpha$ et $(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\alpha = \mathrm{tr}\,\sigma^{\mu\nu} = 0$. De plus, on a

$$\epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\delta}(\sigma^{\mu\nu})_\gamma{}^\beta(\sigma^{\rho\sigma})_\alpha{}^\delta = (\sigma^{\mu\nu})^{\alpha\beta}(\sigma^{\rho\sigma})_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\,(g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}) + \tfrac{i}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{4.3.13}$$

On obtient donc

$$W^\alpha W_\alpha\big|_{\theta\theta} = 2i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda} + D^2 - \tfrac{1}{2}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \tfrac{i}{4}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \tag{4.3.14}$$

De même, puisque $\overline{W}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}(y^\dagger)\big|_{\overline{\theta\theta}} = \overline{W}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}(x)\big|_{\overline{\theta\theta}}$, on a en langage neutre

$$\overline{W}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}\big|_{\overline{\theta\theta}} = 2i\overline{\lambda}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda + D^2 - \tfrac{1}{2}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \tfrac{i}{4}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \tag{4.3.15}$$

d'où l'expression de la densité lagrangienne $\mathcal{L}_V$

$$\mathcal{L}_V = -\tfrac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \tfrac{i}{2}\,(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda} + \overline{\lambda}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda) + \tfrac{1}{2}\,D^2 \tag{4.3.16}$$

Les superchamps W_α et $\overline{W}^{\dot\alpha}$ contiennent le champ spinoriel λ et son conjugué $\overline{\lambda}$, partenaires supersymétriques du champ de jauge A_μ. Ce champ spinoriel est appelé *jaugino*. En notation quadrispinorielle, on obtient

$$\mathcal{L}_V = -\tfrac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \tfrac{i}{2}\,\overline{\Psi}_M\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_M + \tfrac{1}{2}\,D^2 \tag{4.3.17}$$

où le jaugino forme un spineur de Majorana $\Psi_M = \begin{pmatrix}\lambda_\alpha\\ \overline{\lambda}^{\dot\alpha}\end{pmatrix}$.

On notera que la densité lagrangienne peut aussi s'écrire sous la forme

$$\mathcal{L}_V = \tfrac{1}{4}\int d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\,\left(W^\alpha\mathcal{D}_\alpha\mathcal{V} + \overline{W}_{\dot\alpha}\overline{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\mathcal{V}\right) \tag{4.3.18}$$

En effet, cette expression est équivalente à (4.3.11) car W^α étant indépendant de $\overline{\theta}_{\dot\alpha}$, on peut écrire $W^\alpha W_\alpha = -\frac{1}{4}\,\overline{\mathcal{D}\mathcal{D}}W^\alpha\mathcal{D}_\alpha\mathcal{V}$ et $\overline{D}_{\dot\alpha}$ ne diffère de $\overline{\partial}_{\dot\alpha}$ que par une dérivée spatio-temporelle.

Couplage avec la matière. Il s'agit maintenant de coupler le champ de jauge aux champs de matière qui sont décrits par des superchamps chiraux.

On considère d'abord une transformation de jauge $U(1)$ globale dans laquelle un superchamp chiral Φ_i se transforme selon

$$\begin{aligned}\Phi_i &\to \Phi'_i = e^{iq_i\Lambda}\Phi_i\\ \Phi_i^\dagger &\to \Phi'^\dagger_i = e^{-iq_i\Lambda}\Phi_i^\dagger\end{aligned} \tag{4.3.19}$$

où q_i est la charge $U(1)$ du superchamp Φ_i et Λ est l'angle de rotation $U(1)$ constant (q_i et Λ sont réels). La transformation conserve évidemment la chiralité du superchamp.

Le terme cinétique donné par le potentiel de Kähler $K(\Phi_i, \Phi_i^\dagger) = \Phi_i^\dagger\Phi_i$ est invariant, Λ étant réel.

Le superpotentiel $W(\Phi_i)$ par contre n'est pas invariant pour toute valeur des constantes :

$$\begin{aligned}W(\Phi_i) \to W(\Phi'_i) &= f_i\,\Phi'_i + \tfrac{1}{2}\,m_{ij}\,\Phi'_i\Phi'_j + \tfrac{1}{3}\,g_{ijk}\,\Phi'_i\Phi'_j\Phi'_k\\ &= e^{iq_i\Lambda}f_i\,\Phi_i + \tfrac{1}{2}\,m_{ij}\,e^{i(q_i+q_j)\Lambda}\,\Phi_i\Phi_j + \tfrac{1}{3}\,g_{ijk}\,e^{i(q_i+q_j+q_k)\Lambda}\,\Phi_i\Phi_j\Phi_k\end{aligned} \tag{4.3.20}$$

qui est invariant seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$f_i = 0 \;\text{ si }\; q_i \neq 0\,, \qquad m_{ij} = 0 \;\text{ si }\; q_i + q_j \neq 0\,, \qquad g_{ijk} = 0 \;\text{ si }\; q_i + q_j + q_k \neq 0 \tag{4.3.21}$$

On considère maintenant le cas d'une transformation de jauge $U(1)$ locale. Cependant, le passage d'une transformation globale à une transformation locale n'est pas immédiat : on ne peut pas remplacer Λ par $\Lambda(x)$ car cela briserait la supersymétrie. Il est nécessaire de promouvoir Λ au statut de superchamp et d'écrire la transformation de jauge $U(1)$ locale selon

$$\begin{aligned} \Phi_i &\to \Phi_i' = e^{iq_i\Lambda(x,\theta,\overline{\theta})}\Phi_i \\ \Phi_i^\dagger &\to \Phi'^\dagger_i = e^{-iq_i\Lambda^\dagger(x,\theta,\overline{\theta})}\Phi_i^\dagger \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

Le superchamp Λ est lui-même chiral afin de conserver la chiralité de la transformation : $\overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\Lambda = 0$ et $\mathcal{D}_\alpha\Lambda^\dagger = 0$.

Le terme cinétique (4.2.1) de la densité lagrangienne du superchamp chiral Φ_i n'est pas invariant dans de telles transformations locales :

$$\mathcal{L}_K = \int d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\; \Phi_i^\dagger\Phi_i \to \int d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\; \Phi_i^\dagger e^{iq_i(\Lambda-\Lambda^\dagger)}\Phi_i \tag{4.3.23}$$

Le terme $i(\Lambda - \Lambda^\dagger)$ correspond précisément à la généralisation supersymétrique des transformations de jauge pour un superchamp vectoriel. On peut donc rétablir l'invariance de jauge en modifiant le terme cinétique de la façon suivante :

$$\mathcal{L}_K = \int d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\; \Phi_i^\dagger e^{-q_i\mathcal{V}}\Phi_i \tag{4.3.24}$$

pourvu que les superchamps Φ_i et $\mathcal{V}$ se transforment simultanément selon (4.3.22) et $\mathcal{V} \to \mathcal{V}' = \mathcal{V} + i(\Lambda - \Lambda^\dagger)$.

Afin d'évaluer le terme cinétique, on se place dans la jauge de Wess–Zumino dans laquelle $e^{\mathcal{V}} = 1 + \mathcal{V} + \frac{1}{2}\mathcal{V}^2$. La densité lagrangienne (4.3.24) devient

$$\mathcal{L}_K = \int d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\; \left(\Phi_i^\dagger\Phi_i - q_i\,\Phi_i^\dagger\mathcal{V}\Phi_i + \tfrac{1}{2}\,q_i^2\,\Phi_i^\dagger\mathcal{V}^2\Phi_i\right) \tag{4.3.25}$$

Le calcul conduit à l'expression suivante en termes des champs composants, Φ_i étant donné par (3.5.4) et $\mathcal{V}$ par (3.6.8) :

$$\mathcal{L}_K = (\mathcal{D}^\mu\phi_i)^\dagger\mathcal{D}_\mu\phi_i + \tfrac{i}{2}\left(\psi_i\sigma^\mu\mathcal{D}_\mu\overline{\psi}_i - \mathcal{D}_\mu\psi_i\sigma^\mu\overline{\psi}_i\right) + F_iF_i^\dagger - \tfrac{i}{2}\sqrt{2}\,q_i\left(\phi_i^\dagger\,\lambda\psi_i - \overline{\psi}_i\overline{\lambda}\,\phi_i\right) - \tfrac{1}{2}\,q_i\,\phi_i^\dagger D\phi_i \tag{4.3.26}$$

où l'on a défini la dérivée covariante de jauge usuelle $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - iq_iA_\mu$.

Enfin, le terme de superpotentiel $\mathcal{L}_I$ de la densité lagrangienne – eq. (4.2.2) – est soumis aux mêmes conditions (4.3.21) pour assurer son invariance de jauge locale.

L'expression complète de la densité lagrangienne invariante de jauge sous un groupe de jauge abélien s'écrit donc (en incluant les termes de superpotentiel) :

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta\left(\tfrac{1}{4}\,W^\alpha W_\alpha + W(\Phi_i)\right) + \int d^2\overline{\theta}\left(\tfrac{1}{4}\,\overline{W}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha} + W(\Phi_i^\dagger)\right) + \int d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\; \Phi_i^\dagger e^{-q_i\mathcal{V}}\Phi_i \tag{4.3.27}$$

Lagrangien QED supersymétrique. Il est maintenant possible d'écrire la forme complète du lagrangien de l'électrodynamique quantique supersymétrique.

Les champs de matière sont représentés par deux superchamps $\Phi_\pm$ qui contiennent les deux spineurs de Weyl $\phi_\pm$ nécessaires à la construction d'un spineur de Dirac qui décrit l'électron (de charge $-e$) et son antiparticule, le positron (de charge $+e$). Le champ de jauge $U(1)$ est représenté par un superchamp vectoriel $\mathcal{V}$, dont le lagrangien invariant de jauge s'exprime au moyen des superchamps chiraux W_α et $\overline{W}_{\dot{\alpha}}$. Le couplage entre superchamps de matière et superchamp de jauge est obtenu par la construction précédente. Par ailleurs, le seul terme de superpotentiel admissible pour les superchamps de matière est le terme de masse puisqu'il n'y a que deux charges opposées. La densité lagrangienne de super-QED s'écrit donc en superchamps :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{SQED} = &\int d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\, \left(\Phi_+^\dagger e^{e\mathcal{V}}\Phi_+ + \Phi_-^\dagger e^{-e\mathcal{V}}\Phi_-\right) \\ &+ \int d^2\theta \big(m\Phi_+\Phi_- + \tfrac{1}{4}\, W^\alpha W_\alpha\big) + \int d^2\overline{\theta}\, \left(m\Phi_+^\dagger\Phi_-^\dagger + \tfrac{1}{4}\,\overline{W}_{\dot{\alpha}}\overline{W}^{\dot{\alpha}}\right)\end{aligned} \tag{4.3.28}$$

La densité lagrangienne totale s'écrit donc, avec $\mathcal{D}_\mu \bullet_\pm = \partial_\mu \pm ieA_\mu \bullet_\pm$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{SQED} = &-\tfrac{1}{4}\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda} + \tfrac{1}{2}\, D^2 + (\mathcal{D}^\mu\phi_+)^\dagger\mathcal{D}_\mu\phi_+ + (\mathcal{D}^\mu\phi_-)^\dagger\mathcal{D}_\mu\phi_- + F_+^\dagger F_+ + F_-^\dagger F_- \\ &+ i\big(\psi_+\sigma^\mu\mathcal{D}_\mu\overline{\psi}_+ + \psi_-\sigma^\mu\mathcal{D}_\mu\overline{\psi}_-\big) + \tfrac{1}{2}\, ie\sqrt{2}\,\big(\phi_+^\dagger\,\lambda\psi_+ - \overline{\psi}_+\overline{\lambda}\,\phi_+\big) - \tfrac{1}{2}\, ie\sqrt{2}\,\big(\phi_-^\dagger\,\lambda\psi_- - \overline{\psi}_-\overline{\lambda}\,\phi_-\big) \\ &+ \tfrac{1}{2}\, eD\big(\phi_+^\dagger\phi_+ - \phi_-^\dagger\phi_-\big) + m\big(F_+\phi_- + F_-\phi_+ - \psi_+\psi_-\big) + m\big(F_+^\dagger\phi_-^\dagger + F_-^\dagger\phi_+^\dagger - \overline{\psi}_+\overline{\psi}_-\big)\end{aligned} \tag{4.3.29}$$

Les équations du mouvement des champs auxiliaires $F_\pm$ et D sont données par $F_\pm = -m\phi_\mp^\dagger$, voir éq. (4.2.7), et $D = -\frac{1}{2}\, e(\phi_+^\dagger\phi_+ - \phi_-^\dagger\phi_-)$, voir éqs. (4.3.16) et (4.3.26). On a donc

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{SQED} = &-\tfrac{1}{4}\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda} + (\mathcal{D}^\mu\phi_+)^\dagger\mathcal{D}_\mu\phi_+ + (\mathcal{D}^\mu\phi_-)^\dagger\mathcal{D}_\mu\phi_- + i\big(\psi_+\sigma^\mu\mathcal{D}_\mu\overline{\psi}_+ + \psi_-\sigma^\mu\mathcal{D}_\mu\overline{\psi}_-\big) \\ &+ \tfrac{1}{2}\, ie\sqrt{2}\,\big(\phi_+^\dagger\,\lambda\psi_+ - \overline{\psi}_+\overline{\lambda}\,\phi_+\big) - \tfrac{1}{2}\, ie\sqrt{2}\,\big(\phi_-^\dagger\,\lambda\psi_- - \overline{\psi}_-\overline{\lambda}\,\phi_-\big) - m\big(\psi_+\psi_- + \overline{\psi}_+\overline{\psi}_-\big) - V(\phi_+,\phi_-)\end{aligned} \tag{4.3.30}$$

où le potentiel $V(\phi_+,\phi_-)$ est donné par

$$V(\phi_+,\phi_-) = m^2\big(\phi_+^\dagger\phi_+ + \phi_-^\dagger\phi_-\big) + \tfrac{1}{8}\, e^2\big(\phi_+^\dagger\phi_+ - \phi_-^\dagger\phi_-\big)^2 \tag{4.3.31}$$

Le lagrangien QED supersymétrique contient donc le photon (champ A_μ) et l'électron (champs $\psi_\pm$ et leurs conjugués $\overline{\psi}_\pm$ formant un spineur de Dirac et son conjugué) mais aussi leurs partenaires supersymétriques : les sélectrons (champs scalaires complexes $\phi_\pm$) et le photino (champ spinoriel λ et son conjugué $\overline{\lambda}$ formant un spineur de Majorana). Bien que les termes d'interactions semblent assez compliqués, les couplages sont très fortement contraints par la supersymétrie. Ainsi, les couplages de Yukawa sont complètement déterminés par la constante de couplage de jauge et les masses de l'électron et des sélectrons s'expriment en fonction de l'unique paramètre de masse m.

4.4 Théorie de jauge non abélienne supersymétrique

On se place maintenant dans le cas d'un groupe de jauge G non abélien. On note T^a les générateurs hermitiens du groupe de jauge ($a = 1,\ldots,\dim G$) dans une représentation donnée, les relations de commutation entre les générateurs T^a s'écrivant $\big[T^a, T^b\big] = t^{abc}\,T^c$, où les constantes de structure t^{abc} sont complètement antisymétriques. Les générateurs T^a sont normalisés dans la représentation adjointe par $\mathrm{tr}(T^aT^b) = \delta^{ab}$.

Champs de jauge. Soit $\mathcal{V}$ un superchamp vectoriel à valeurs dans la représentation en question du groupe de jauge, c'est-à-dire $\mathcal{V}_i^{\ j} = \mathcal{V}^a (T^a)_i^{\ j}$ (la somme sur l'indice a est sous-entendue). En notant que l'objet à considérer est plutôt $e^{\mathcal{V}}$ que le superchamp $\mathcal{V}$ lui-même, on généralise la transformation de jauge supersymétrique (3.6.6) du superchamp vectoriel au cas non abélien par

$$e^{\mathcal{V}} \to e^{-i\Lambda^\dagger} \, e^{\mathcal{V}} \, e^{i\Lambda} \tag{4.4.1}$$

où $\Lambda_i^{\ j} = \Lambda^a (T^a)_i^{\ j}$ et les paramètres Λ^a de la transformation désignent un ensemble de superchamps chiraux. Cette équation ne conduit pas à une expression simple de la loi de transformation du superchamp $\mathcal{V}$ car $\mathcal{V}$ et Λ ne commutent pas. Au premier ordre, on obtient

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{V}'} &= 1 + \mathcal{V}' + \dots = (1 - i\Lambda^\dagger + \dots)(1 + \mathcal{V} + \dots)(1 + i\Lambda + \dots) \\ &= 1 + \mathcal{V} + i(\Lambda - \Lambda^\dagger) + \dots \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

On peut donc, comme dans le cas $U(1)$, se placer en jauge de Wess–Zumino dans laquelle $\mathcal{V}^3 = 0$, le développement en série de l'exponentielle ne comportant alors qu'un nombre fini de termes.

La généralisation des superchamps chiraux W_α et $\overline{W}^{\dot\alpha}$ contenant le tenseur de Maxwell s'écrit

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -\tfrac{1}{4} \, \overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha} \overline{\mathcal{D}}^{\dot\alpha} e^{-\mathcal{V}} \, \mathcal{D}_\alpha \, e^{\mathcal{V}} \\ \overline{W}^{\dot\alpha} &= \tfrac{1}{4} \, \mathcal{D}^\alpha \mathcal{D}_\alpha e^{\mathcal{V}} \, \overline{\mathcal{D}}^{\dot\alpha} \, e^{-\mathcal{V}} \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Les superchamps chiraux W_α et $\overline{W}^{\dot\alpha}$ ne sont plus invariants de jauge, mais se transforment selon

$$\begin{aligned} W_\alpha &\to e^{-i\Lambda} \, W_\alpha \, e^{i\Lambda} \\ \overline{W}^{\dot\alpha} &\to e^{-i\Lambda^\dagger} \, \overline{W}^{\dot\alpha} \, e^{i\Lambda^\dagger} \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

En effet, on a (calcul similaire pour $\overline{W}^{\dot\alpha}$)

$$\begin{aligned} W_\alpha \to W'_\alpha &= -\tfrac{1}{4} \, \overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha} \overline{\mathcal{D}}^{\dot\alpha} \Big(e^{-i\Lambda} \, e^{-\mathcal{V}} \, e^{i\Lambda^\dagger} \mathcal{D}_\alpha \big(e^{-i\Lambda^\dagger} \, e^{\mathcal{V}} \, e^{i\Lambda} \big) \Big) \\ &= -\tfrac{1}{4} \, \overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha} \overline{\mathcal{D}}^{\dot\alpha} \Big(e^{-i\Lambda} \, e^{-\mathcal{V}} \, (\mathcal{D}_\alpha \, e^{\mathcal{V}}) \, e^{i\Lambda} + e^{-i\Lambda} \, \mathcal{D}_\alpha \, e^{i\Lambda} \Big) \\ &= -\tfrac{1}{4} \, e^{-i\Lambda} \Big(\overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha} \overline{\mathcal{D}}^{\dot\alpha} \big(e^{-\mathcal{V}} \, \mathcal{D}_\alpha \, e^{\mathcal{V}} \big) \Big) \, e^{i\Lambda} \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

en utilisant les conditions de chiralité du superchamp Λ, $\overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha} \, e^{i\Lambda} = 0$ et $\mathcal{D}_\alpha \, e^{i\Lambda^\dagger} = 0$. Le dernier terme de l'avant-dernière ligne est nul car $\overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha} \overline{\mathcal{D}}^{\dot\alpha} \mathcal{D}_\alpha \, e^{i\Lambda} = \overline{\mathcal{D}}^{\dot\alpha} \big(\mathcal{D}_\alpha \overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha} \, e^{i\Lambda} - \big\{ \overline{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}, \mathcal{D}_\alpha \big\} e^{i\Lambda} \big) = 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} \, \overline{\mathcal{D}}^{\dot\alpha} \partial_\mu e^{i\Lambda} = 0$.

Explicitement, on obtient en jauge de Wess-Zumino, compte tenu de $\mathcal{V}^3 = 0$:

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -\tfrac{1}{4} \, \overline{\mathcal{D}\mathcal{D}} \Big(\big(1 - \mathcal{V} + \tfrac{1}{2} \, \mathcal{V}^2\big) \mathcal{D}_\alpha \big(1 + \mathcal{V} + \tfrac{1}{2} \, \mathcal{V}^2\big) \Big) = -\tfrac{1}{4} \, \overline{\mathcal{D}\mathcal{D}} \mathcal{D}_\alpha \, \mathcal{V} + \tfrac{1}{8} \, \overline{\mathcal{D}\mathcal{D}} \big[\mathcal{V}, \mathcal{D}_\alpha \mathcal{V} \big] \\ \overline{W}^{\dot\alpha} &= \tfrac{1}{4} \, \mathcal{D}\mathcal{D} \Big(\big(1 + \mathcal{V} + \tfrac{1}{2} \, \mathcal{V}^2\big) \overline{\mathcal{D}}^{\dot\alpha} \big(1 - \mathcal{V} + \tfrac{1}{2} \, \mathcal{V}^2\big) \Big) = -\tfrac{1}{4} \, \mathcal{D}\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}}^{\dot\alpha} \, \mathcal{V} - \tfrac{1}{8} \, \mathcal{D}\mathcal{D} \big[\mathcal{V}, \overline{\mathcal{D}}^{\dot\alpha} \mathcal{V} \big] \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

Le calcul en termes des champs composants est un peu long mais ne pose pas de difficulté. On se place en langage chiral (les champs dépendent de $y = x - i\theta\sigma\overline{\theta}$). Le premier terme de W_α dans (4.4.6) est identique au cas abélien et est donné par (4.3.7). Le second terme donne

$$\big[\mathcal{V}, \mathcal{D}_\alpha \mathcal{V} \big] = i\overline{\theta\theta} (\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} \theta_\beta \big[A_\mu, A_\nu \big] + i\theta\theta\overline{\theta\theta} \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} \big[A_\mu, \overline{\lambda}^{\dot\alpha} \big] \tag{4.4.7}$$

Compte tenu du fait qu'en langage chiral $\overline{\mathcal{D}\mathcal{D}} \, \overline{\theta\theta} = -4$, on obtient finalement

$$W_\alpha(y, \theta, \overline{\theta}) = -i\lambda_\alpha + \theta_\alpha D + (\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} \theta_\beta \big(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \tfrac{i}{2} \, [A_\mu, A_\nu] \big) - \theta\theta \, \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} \big(\partial_\mu \overline{\lambda}^{\dot\alpha} + \tfrac{i}{2} \, [A_\mu, \overline{\lambda}^{\dot\alpha}] \big) \tag{4.4.8}$$

Le terme cinétique invariant de jauge de la densité lagrangienne des champs de jauge est obtenu en contractant sur les indices spinoriels et en prenant la trace. On trouve donc

$$\mathcal{L}_{jauge} = \tfrac{1}{4} \int d^2\theta \ \mathrm{tr}(W^\alpha W_\alpha) + \tfrac{1}{4} \int d^2\overline{\theta} \ \mathrm{tr}(\overline{W}_{\dot\alpha} \overline{W}^{\dot\alpha}) \tag{4.4.9}$$

Champs de matière. Les générateurs T^a du groupe de jauge étant dans une représentation $\mathscr{R}$ donnée, on considère des superchamps chiraux Φ_i ($i = 1, \ldots, \dim \mathscr{R}$) se transformant dans cette représentation selon

$$\begin{aligned} \Phi_i &\to \Phi'_i = \left(e^{-i\Lambda}\right)_i^{\ j} \Phi_j \\ \Phi_i^\dagger &\to \Phi'^\dagger_i = \Phi_j^\dagger \left(e^{i\Lambda^\dagger}\right)^j_{\ i} \end{aligned} \tag{4.4.10}$$

où $\Lambda_i^{\ j} = \Lambda^a (T^a_{\mathscr{R}})_i^{\ j}$ (la somme sur l'indice a est sous-entendue) et les paramètres Λ^a de la transformation désignent un ensemble de superchamps chiraux. Compte tenu de la loi de transformation des superchamps Φ_i et du superchamp vectoriel $\mathcal{V}$ (ou plus exactement de $e^{\mathcal{V}}$), le terme cinétique de la densité lagrangienne des champs de matière est donné par

$$\mathcal{L}_K = \int d^2\theta \, d^2\overline{\theta} \; \Phi^\dagger e^{\mathcal{V}} \Phi \tag{4.4.11}$$

Le calcul est similaire à celui de la formule (4.3.26) avec $q_i = -1$ et la définition appropriée de la dérivée covariante (on notera que maintenant $A_\mu = A^a_\mu T^a$).

On peut à ce niveau introduire la constante de couplage g par une redéfinition du superchamp vectoriel $\mathcal{V} \to 2g\mathcal{V}$. Les superchamps W_α et $\overline{W}^{\dot\alpha}$ sont alors multipliés par $2g$ et il faut diviser la densité lagrangienne par un facteur $4g^2$. Par ailleurs, on effectue le remplacement $[\cdot,\cdot] \to 2g[\cdot,\cdot]$ dans les définitions de $F_{\mu\nu}$ et des dérivées covariantes.

D'où l'expression complète de la densité lagrangienne invariante de jauge sous un groupe de jauge non abélien G (en incluant les termes de superpotentiel) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = {} & \frac{1}{16g^2} \left(\int d^2\theta \, \mathrm{tr}\left(W^\alpha W_\alpha\right) + \int d^2\overline{\theta} \, \mathrm{tr}\left(\overline{W}_{\dot\alpha} \overline{W}^{\dot\alpha}\right) \right) \\ & + \int d^2\theta \, d^2\overline{\theta} \; \Phi^\dagger e^{2g\mathcal{V}} \Phi + \int d^2\theta \; W(\Phi) + \int d^2\overline{\theta} \; W(\Phi^\dagger) \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

On notera que pour assurer la compatibilité avec la symétrie de jauge, le superpotentiel doit être aussi invariant de jauge. Il s'en suit qu'un terme du type $g_{i_1,\ldots,i_n} \Phi_{i_1} \ldots \Phi_{i_n}$ dans le superpotentiel ne peut exister que si $g_{i_1,\ldots,i_n}$ est un tenseur invariant du groupe de jauge G et que $\mathscr{R} \times \cdots \times \mathscr{R}$ (produit n fois) contient la représentation triviale de G[1].

On obtient en termes des champs composants, à une dérivée spatio-temporelle près (les champs de matière sont dans une représentation donnée du groupe de jauge G, les champs de jauge sont dans la représentation adjointe) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = {} & -\tfrac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + i\lambda^a \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \overline{\lambda}^a + \tfrac{1}{2} D^a D^a + (\mathcal{D}^\mu \phi_i)^\dagger \mathcal{D}_\mu \phi_i + \tfrac{i}{2}\left(\psi_i \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \overline{\psi}_i - \mathcal{D}_\mu \psi_i \sigma^\mu \overline{\psi}_i\right) \\ & + F_i^\dagger F_i + ig\sqrt{2}\left(\phi_i^\dagger (T^a)^{ij} \psi_j \lambda^a - \overline{\lambda}^a \overline{\psi}_i \, (T^a)^{ij} \phi_j\right) + g D^a \phi_i^\dagger (T^a)^{ij} \phi_j \\ & + F_i \frac{\partial W}{\partial \phi_i} + F_i^\dagger \frac{\partial W^\dagger}{\partial \phi_i^\dagger} - \tfrac{1}{2} \psi_i \psi_j \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j} - \tfrac{1}{2} \overline{\psi}_i \overline{\psi}_j \frac{\partial^2 W^\dagger}{\partial \phi_i^\dagger \partial \phi_j^\dagger} \end{aligned} \tag{4.4.13}$$

avec

$$\begin{aligned} F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - igt^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \\ \mathcal{D}_\mu \overline{\lambda}^a &= \partial_\mu \overline{\lambda}^a + igt^{abc} A^b_\mu \overline{\lambda}^c \\ \mathcal{D}_\mu \phi_i &= \partial_\mu \phi_i + 2igA^a_\mu (T^a)_i^j \phi_j \\ \mathcal{D}_\mu \psi_i &= \partial_\mu \psi_i + 2igA^a_\mu (T^a)_i^j \psi_j \end{aligned} \tag{4.4.14}$$

1. Ainsi, la seule possibilité d'assurer un terme de masse aux champs de matière en QCD où le groupe de jauge est $SU(3)$, est de considérer des termes du type $\overline{\Phi}\Phi$ où les champs Φ_i (quarks) se transforment selon la représentation fondamentale $\mathbf{3}$ et les champs $\overline{\Phi}_i$ (antiquarks) selon la représentation conjuguée $\overline{\mathbf{3}}$.

Les équations du mouvement des champs auxiliaires sont

$$
\begin{aligned}
&F_i^\dagger = -\frac{\partial W}{\partial \phi_i} \qquad \text{et} \qquad F_i = -\frac{\partial W^\dagger}{\partial \phi_i^\dagger} \\
&D^a = -g\phi_i^\dagger (T^a)^{ij}\phi_j
\end{aligned}
\tag{4.4.15}
$$

On en déduit l'expression de la densité lagrangienne après élimination des champs auxiliaires :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = &-\tfrac{1}{4}\, F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + i\lambda^a\sigma^\mu\mathcal{D}_\mu\overline{\lambda}^a + (\mathcal{D}^\mu\phi_i)^\dagger\mathcal{D}_\mu\phi_i + \tfrac{i}{2}\big(\psi_i\sigma^\mu\mathcal{D}_\mu\overline{\psi}_i - \mathcal{D}_\mu\psi_i\sigma^\mu\overline{\psi}_i\big) \\
&+ ig\sqrt{2}\,\big(\phi_i^\dagger(T^a)^{ij}\psi_j\lambda^a - \overline{\lambda}^a\overline{\psi}_i\,(T^a)^{ij}\phi_j\big) - \tfrac{1}{2}\,\psi_i\psi_j\,\frac{\partial^2 W}{\partial\phi_i\partial\phi_j} - \tfrac{1}{2}\,\overline{\psi}_i\overline{\psi}_j\,\frac{\partial^2 W^\dagger}{\partial\phi_i^\dagger\partial\phi_j^\dagger} - V(\phi_i,\phi_i^\dagger)
\end{aligned}
\tag{4.4.16}
$$

le potentiel scalaire $V(\phi_i, \phi_i^\dagger)$ étant donné par

$$
V(\phi_i,\phi_i^\dagger) = F_i^\dagger F_i + \tfrac{1}{2}\,D^aD^a = \sum_i \left|\frac{\partial W}{\partial \Phi_i}\right|^2_{\Phi_i=\phi_i} + \tfrac{1}{2}\,g^2\sum_a \big(\phi_i^\dagger(T^a)^{ij}\phi_j\big)^2 \tag{4.4.17}
$$

5. Brisure de la supersymétrie

5.1 Brisure spontanée de la supersymétrie

On considère une théorie des champs définie par un ensemble de champs ϕ et décrite par un lagrangien qu'on suppose invariant sous un groupe de symétrie G de générateurs T^a. L'état du vide est défini comme solution stationnaire des équations du mouvement de plus basse énergie, noté $|0\rangle$. Le vide est invariant sous le groupe G si l'on a pour tout a, en notant $\langle\phi\rangle = \langle 0|\phi|0\rangle$,

$$\big[\langle\phi\rangle, T^a\big] = \langle 0|\big[\phi, T^a\big]|0\rangle = 0 \tag{5.1.1}$$

L'algèbre de Poincaré étant une algèbre de symétrie de la théorie et l'action des générateurs étant représentée en termes d'opérateurs différentiels, on en déduit

$$\begin{aligned} &\big[\langle\phi\rangle, P_\mu\big] = i\partial_\mu\langle\phi\rangle = 0 \\ &\big[\langle\phi\rangle, M_{\mu\nu}\big] = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\langle\phi\rangle + \Sigma_{\mu\nu}\langle\phi\rangle = 0 \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

où $\Sigma_{\mu\nu}$ correspond à la partie de spin des générateurs de Lorentz. On a donc

$$\begin{aligned} \partial_\mu\langle\phi\rangle = 0 \qquad & \text{pour tout champ} \\ \langle\phi\rangle = 0 \qquad & \text{pour tout champ non scalaire} \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Ainsi, seuls les champs scalaires peuvent avoir une valeur moyenne dans le vide non nulle.

Dans le cas d'une théorie de jauge supersymétrique, la densité lagrangienne est donnée par (4.4.16). Le lagrangien est donc minimal si le potentiel scalaire $V(\phi_i, \phi_i^\dagger)$ est minimal où ϕ_i désignent les champs scalaires de la théorie. Le vide d'une théorie supersymétrique doit donc satisfaire (5.1.3) et $V(\langle\phi_i\rangle, \langle\phi_i^\dagger\rangle)$ minimal. Le potentiel scalaire est donné par

$$V(\phi_i, \phi_i^\dagger) = F_i^\dagger F_i + \tfrac{1}{2}\, D^a D^a \tag{5.1.4}$$

où F_i et D_a sont solutions des équations du mouvement, qui prennent la forme générale $F_i^\dagger = F(\phi_i)$ et $D^a = D(A_\mu^a, \lambda, \phi_i)$. Le minimum est donc atteint (et vaut zéro) pour $F(\langle\phi_i^\dagger\rangle) = 0$ et $D(\langle\phi_i\rangle, \langle\phi_i^\dagger\rangle) = 0$.

Par ailleurs, l'hamiltonien H d'une théorie supersymétrique peut s'exprimer en fonction des générateurs Q_α et $\overline{Q}_{\dot\alpha}$ de l'algèbre de supersymétrie :

$$H = P_0 = \tfrac{1}{4}\big(Q_1\overline{Q}_{\dot 1} + \overline{Q}_{\dot 1}Q_1 + Q_2\overline{Q}_{\dot 2} + \overline{Q}_{\dot 2}Q_2\big) \tag{5.1.5}$$

d'après $\big\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\alpha}\big\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\, P_\mu$. Par conséquent, on a $\langle\varphi|H|\varphi\rangle \geq 0$ quel que soit l'état $|\varphi\rangle$. Si $\langle 0|H|0\rangle = 0$, alors $\langle 0|Q_\alpha\overline{Q}_{\dot\alpha} + \overline{Q}_{\dot\alpha}Q_\alpha|0\rangle = 0$, d'où $Q_\alpha|0\rangle = 0$ et $\overline{Q}_{\dot\alpha}|0\rangle = 0$: le vide est un état supersymétrique. Si $\langle 0|H|0\rangle \neq 0$, le vide n'est plus un état supersymétrique.

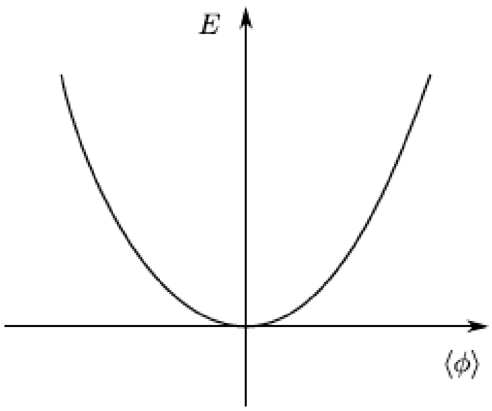
Il y aura donc brisure spontanée de la supersymétrie si la valeur moyenne dans le vide de l'hamiltonien, c'est-à-dire l'énergie du vide, n'est pas nulle. Supposons qu'il existe deux solutions stationnaires des équations du mouvement, correspondant à deux états physiques du vide possibles, $|\Omega\rangle$ supersymétrique et $|\Omega'\rangle$ non supersymétrique. Dans l'état supersymétrique $|\Omega\rangle$, tous les champs auxiliaires ont une valeur moyenne dans le vide nulle, le potentiel s'annule et l'énergie du vide est nulle. Dans l'état non supersymétrique $|\Omega'\rangle$, il y a au moins un champ auxiliaire dont la valeur moyenne dans le vide n'est pas nulle, le potentiel est positif et l'énergie du vide est strictement positive.

La différence essentielle entre brisure de la supersymétrie et brisure d'une symétrie de jauge réside dans la nature des états après brisure. Dans le cas de la symétrie de jauge, il existe après brisure un état symétrique et un état non symétrique ; c'est ce dernier qui est le plus stable. Dans le cas de la supersymétrie, c'est toujours l'état supersymétrique qui est le plus stable.

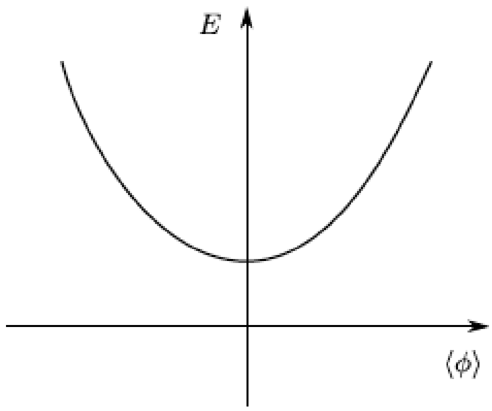
Pour briser la supersymétrie de façon spontanée, il faut donc opérer différemment des symétries de jauge. La supersymétrie pourra être brisée spontanément si l'état du vide *ne peut pas* être supersymétrique. Ce sera le cas si les champs auxiliaires ne peuvent pas avoir de valeur moyenne dans le vide nulle *simultanément*. Ainsi, il y aura brisure spontanée de la supersymétrie si le système d'équations $F(\langle\phi_i^\dagger\rangle) = 0$ et $D(\langle\phi_i\rangle, \langle\phi_i^\dagger\rangle) = 0$ n'admet aucune solution.

En résumé, la brisure de la supersymétrie est déterminée par les valeurs moyennes dans le vide des champs auxiliaires ; la brisure de la symétrie de jauge est déterminée par les valeurs moyennes dans le vide des champs physiques.

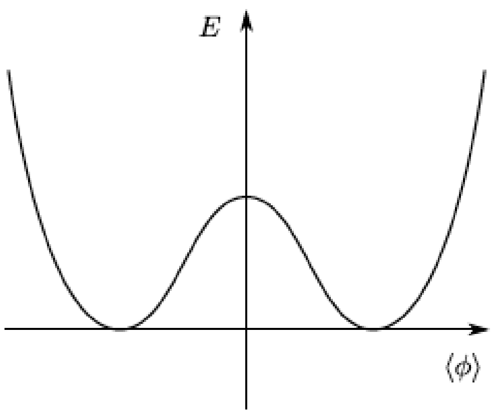
Les graphes ci-dessous illustrent la situation (ϕ représente un champ physique et E l'énergie du vide) :



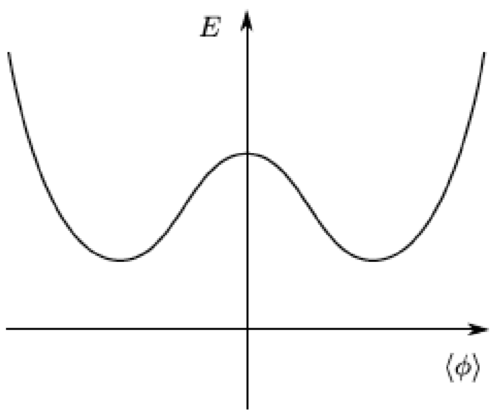
(a) $E = 0$ et $\langle\phi\rangle = 0$: la symétrie de jauge et la supersymétrie sont intactes.



(b) $E \neq 0$ et $\langle\phi\rangle = 0$: la symétrie de jauge est intacte, la supersymétrie est brisée.



(c) $E = 0$ et $\langle\phi\rangle \neq 0$: la symétrie de jauge est brisée, mais la supersymétrie est intacte.



(d) $E \neq 0$ et $\langle\phi\rangle \neq 0$: la symétrie de jauge et la supersymétrie sont brisées.

(source : `http://www.lpthe.jussieu.fr/~erbin/files/classical_susy.pdf`)

5.2 Théorème de Goldstone pour la supersymétrie

Le théorème de Goldstone énonce que si une symétrie continue globale est spontanément brisée (le vide de la théorie n'est pas invariant), alors le spectre de la théorie contient un mode de masse nulle. Le théorème continue d'être valable dans le cas de la supersymétrie, la particule de masse nulle est alors un fermion appelé *goldstino*.

Une théorie supersymétrique est brisée spontanément si le vide est tel que le minimum du potentiel scalaire $V(\phi_i, \phi_i^\dagger)$ est atteint pour des valeurs non nulles de $F(\langle\phi_i^\dagger\rangle)$ ou $D(\langle\phi_i\rangle, \langle\phi_i^\dagger\rangle)$. Compte tenu de l'expression (5.1.4) du potentiel scalaire et des équations du mouvement (4.4.15) des champs auxiliaires dans une théorie de jauge supersymétrique, le potentiel scalaire admet un minimum lorsque

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} = -F_j \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j} - g\phi_j^\dagger (T^a)^{ji} D^a = 0 \tag{5.2.1}$$

Par ailleurs, l'invariance de jauge du superpotentiel W s'écrit

$$\frac{\partial W}{\partial \phi_i}(T^a)^{ij}\phi_j = -F_i^\dagger (T^a)^{ij}\phi_j = 0 \tag{5.2.2}$$

Au minimum du potentiel, les termes de masse des fermions (gauches) dans la densité lagrangienne sont donnés par (voir formule (4.4.16))

$$\left(\psi_i\, , -i\sqrt{2}\,\lambda^b\right) M_L \begin{pmatrix} \psi_j \\ -i\sqrt{2}\,\lambda^a \end{pmatrix} \tag{5.2.3}$$

où M_L est la matrice de masse des fermions (gauches, la matrice de masse M_R pour les fermions droits est conjuguée) :

$$M_L = -\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \left\langle \dfrac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right\rangle & g\langle \phi_k^\dagger (T^a)^{ki}\rangle \\ g\langle \phi_k^\dagger (T^b)^{kj}\rangle & 0 \end{pmatrix} \tag{5.2.4}$$

Or, on a l'équation

$$\begin{pmatrix} \left\langle \dfrac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right\rangle & g\langle \phi_k^\dagger (T^a)^{ki}\rangle \\ g\langle \phi_k^\dagger (T^b)^{kj}\rangle & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle F_j \rangle \\ \langle D^a \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\langle \dfrac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right\rangle \langle F_j \rangle + g\langle \phi_k^\dagger (T^a)^{ki}\rangle \langle D^a \rangle \\ g\langle \phi_k^\dagger (T^b)^{kj}\rangle \langle F_j \rangle \end{pmatrix} = 0 \tag{5.2.5}$$

La dernière égalité provient de la condition de minimisation du potentiel (5.2.1) et de l'invariance de jauge du superpotentiel (5.2.2). Cette matrice possède donc une valeur propre nulle, le vecteur propre associé étant non nul dès lors que la supersymétrie est brisée. On en déduit que le spectre contient nécessairement une particule fermionique de masse nulle, le *goldstino*, correspondant à la combinaison $\psi_G \sim \langle F_j \rangle \psi_j + \langle D^a \rangle \lambda^a$.

5.3 Brisure par terme F : mécanisme de O'Raifeartaigh

Un premier modèle de brisure spontanée de supersymétrie consiste à considérer un lagrangien d'un ensemble de superchamps chiraux Φ_i et de choisir le superpotentiel $W(\Phi_i)$ tel que l'ensemble des champs auxiliaires F_i ne peuvent avoir une valeur moyenne dans le vide nulle simultanément (brisure par terme F). De tels modèles sont appelés modèles de O'Raifeartaigh.

Le modèle le plus simple contient trois superchamps chiraux Φ_i $(i = 1, 2, 3)$, le superpotentiel étant choisi égal à

$$W(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = f\Phi_1 + m\Phi_2\Phi_3 + g\Phi_1\Phi_3^2 \tag{5.3.1}$$

Les équations du mouvement des champs auxiliaires s'écrivent donc

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{\partial W}{\partial \phi_1^*} = -f - g\phi_3^{*2} \\ F_2 &= -\frac{\partial W}{\partial \phi_2^*} = -m\phi_3^* \\ F_3 &= -\frac{\partial W}{\partial \phi_3^*} = -m\phi_2^* - 2g\phi_1^*\phi_3^* \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Le potentiel scalaire devient

$$V(\phi_i, \phi_i^*) = \sum_i F_i^* F_i = f^2 + (m^2 + 2fg)\phi_3^{*2} + g^2\phi_3^{*4} + F_3^2 \tag{5.3.3}$$

Les conditions $\langle F_1 \rangle = \langle F_2 \rangle = 0$ ne sont pas compatibles, la supersymétrie est donc brisée. Le potentiel scalaire $V(\phi_i, \phi_i^*)$ présente un minimum $V_{\min} = f^2$ si $m^2 > |2fg|$. Dans ce cas, le minimum est atteint lorsque $\langle \phi_2 \rangle = \langle \phi_3 \rangle = 0$ alors que la valeur $\langle \phi_1 \rangle$ n'est pas fixée (c'est une "direction plate" du potentiel scalaire). Au minimum du potentiel, on pose $\langle \phi_1 \rangle = \mu$ (qu'on peut toujours supposer réel).
La matrice de masse carrée des champs scalaires $\mathrm{Re}(\phi_i)$ est donnée par

$$M^2_{\mathrm{Re}(\phi)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^2 & g\mu m \\ 0 & g\mu m & m^2 + 2fg + 4g^2\mu^2 \end{pmatrix} \tag{5.3.4}$$

dont les valeurs propres sont $m^2_{\phi_1'} = 0$ et $m^2_{\phi_{2,3}'} = m^2 + fg + 2g^2\mu^2 \pm g\sqrt{m^2\mu^2 + (2g\mu^2 + f)^2}$. La matrice de masse carrée des champs pseudoscalaires $\mathrm{Im}(\phi_i)$ est obtenue en remplaçant $f \to -f$.
La matrice de masse des fermions s'écrit

$$M_\psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & m & g\mu \end{pmatrix} \tag{5.3.5}$$

dont les valeurs propres sont $m_{\psi_1'} = 0$ et $m_{\psi_{2,3}'} = \frac{1}{2}\, g\mu \pm \sqrt{m^2 + \frac{1}{4}\, g^2\mu^2}$. On obtient donc un fermion de masse nulle (le goldstino) relié au superchamp Φ_1 qui est associé à la brisure de la supersymétrie.

On notera que la présence du terme linéaire dans le superpotentiel implique que le superchamp Φ_1 soit un singlet de jauge, ce qui constitue nécessairement une extension du Modèle Standard. Par ailleurs, lorsque $fg/m^2 \ll 1$, les masses des particules satisfont $m_{\mathrm{Im}(\phi_3)} < m_{\psi_3'} < m_{\mathrm{Re}(\phi_3)}$, ce qui est contredit par la phénoménologie.

5.4 Brisure par terme D : mécanisme de Fayet–Iliopoulos

5.4.1 Un modèle simple de brisure par terme D

On considère un lagrangien décrivant l'interaction supersymétrique entre un multiplet vectoriel $\mathcal{V}$ et un multiplet chiral Φ, auquel on ajoute un terme dit de Fayet–Iliopoulos $\kappa D = 2\kappa \mathcal{V}|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}$. Ce terme est à la fois invariant de jauge $U(1)$ et supersymétrique (sa variation dans une transformation de supersymétrie est une dérivée spatio-temporelle). Les équations du mouvement des champs auxiliaires s'écrivent :

$$\begin{aligned} &F = 0 \\ &D + \kappa + e\phi^\dagger\phi = 0 \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

Le potentiel scalaire V s'écrit donc $V = \frac{1}{2} D^2 = \frac{1}{2}(e\phi^\dagger\phi + \kappa)^2$.

Si $e\kappa > 0$, le minimum du potentiel est obtenu pour $\langle\phi\rangle = 0$ mais $\langle D\rangle = -\kappa$. Le champ auxiliaire D n'a pas une valeur moyenne dans le vide nulle, il y a brisure de la supersymétrie. L'invariance de jauge $U(1)$ est conservée. Le lagrangien décrit alors un champ scalaire complexe ϕ de masse $m = \sqrt{e\kappa}$, deux champs spinoriels de masse nulle ψ et λ (ce dernier identifié au goldstino associé à la brisure de supersymétrie) et un champ vectoriel A_μ de masse nulle. Les multiplets contiennent des particules de masses différentes, le vide n'est pas supersymétrique.

Si $e\kappa < 0$, le minimum du potentiel est obtenu pour $\langle\phi\rangle \neq 0$ mais $\langle D\rangle = 0$. Il y a brisure de l'invariance de jauge, mais la supersymétrie est conservée. Dans ce cas, la procédure est standard : on développe le lagrangien autour de la valeur moyenne dans le vide $\langle\phi\rangle = v$ du champ ϕ (l'invariance de jauge permet de se débarrasser de la phase éventuelle de ϕ) ; le champ de jauge A_μ acquiert une masse $m = \sqrt{2}\, ev$ par le mécanisme de Higgs. La supersymétrie étant conservée, les spineurs ψ du superchamp chiral et λ du superchamp vectoriel ont également la masse $m = \sqrt{2}\, ev$ (ils se regroupent pour donner un spineur de Dirac).

5.4.2 Super-QED et mécanisme de Fayet–Iliopoulos

On considère maintenant un lagrangien décrivant l'interaction supersymétrique entre un multiplet vectoriel $\mathcal{V}$ et deux multiplets chiraux $\Phi_\pm$ de charges $+e$ et $-e$, donné par (4.3.29), auquel on ajoute un terme de Fayet–Iliopoulos $\kappa D = 2\kappa\mathcal{V}|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}$. Les équations du mouvement des champs auxiliaires s'écrivent :

$$\begin{aligned} &F_\pm^\dagger + m\phi_\mp = 0 \\ &F_\pm + m\phi_\mp^\dagger = 0 \\ &D + \kappa + \tfrac{1}{2}\, e(\phi_+^\dagger\phi_+ - \phi_-^\dagger\phi_-) = 0 \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

Le potentiel scalaire est obtenu par élimination des champs auxiliaires dans l'expression du lagrangien :

$$V(\phi_+, \phi_-) = \tfrac{1}{2}\kappa^2 + (m^2 + \tfrac{1}{2}\, e\kappa)\phi_+^\dagger\phi_+ + (m^2 - \tfrac{1}{2}\, e\kappa)\phi_-^\dagger\phi_- + \tfrac{1}{8}\, e^2\left(\phi_+^\dagger\phi_+ - \phi_-^\dagger\phi_-\right)^2 \tag{5.4.3}$$

Les valeurs moyennes dans le vide des champs auxiliaires $F_\pm$ et D ne peuvent s'annuler simultanément, la supersymétrie est donc brisée. Deux cas se présentent selon le signe de $m^2 - \frac{1}{2}\, e\kappa$.

1. Cas $m^2 > \frac{1}{2}\, e\kappa$.
   Le potentiel V est minimum pour $\langle\phi_+\rangle = \langle\phi_-\rangle = 0$. Les deux champs scalaires $\phi_\pm$ ont des masses réelles. L'invariance de jauge n'est pas brisée. Le lagrangien décrit donc :
   — deux champs scalaires complexes $\phi_\pm$ de masses $m_\pm = \sqrt{m^2 \pm \frac{1}{2}\, e\kappa}$;
   — trois champs spinoriels $\psi_\pm$ de masse m et λ de masse nulle ;
   — un champ vectoriel A_μ de masse nulle.
   Les champs A_μ et λ restent sans masse : le champ A_μ est le champ de jauge $U(1)$, le champ λ est interprété comme le goldstino associé à la brisure spontanée de supersymétrie. La loi de transformation associée à ce champ s'écrit

$$\delta_\xi\, \lambda = i\xi D + \sigma^{\mu\nu}\xi F_{\mu\nu} \tag{5.4.4}$$

   Si le champ auxiliaire D a une valeur moyenne dans le vide non nulle, $\langle D\rangle = -\kappa$, le champ λ se transforme de façon inhomogène ($\delta_\xi\, \lambda = -i\xi\kappa + \cdots$) et s'identifie comme un fermion de Goldstone.

2. Cas $m^2 < \frac{1}{2}\, e\kappa$.

   Le potentiel V est minimum pour

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi_+^\dagger} &= (m^2 + \tfrac{1}{2}\, e\kappa)\phi_+ + \tfrac{1}{4}\, e^2(\phi_+^\dagger \phi_+ - \phi_-^\dagger \phi_-)\phi_+ = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \phi_-^\dagger} &= (m^2 - \tfrac{1}{2}\, e\kappa)\phi_- - \tfrac{1}{4}\, e^2(\phi_+^\dagger \phi_+ - \phi_-^\dagger \phi_-)\phi_- = 0 \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

   dont la solution est $\langle \phi_+ \rangle = 0$ et $\langle \phi_- \rangle = v$ où v vérifie $\frac{1}{4}\, e^2 v^2 + m^2 - \frac{1}{2}\, e\kappa = 0$.

   Les valeurs moyennes dans le vide des champs scalaires ne sont plus nulles. Il y a brisure de l'invariance de jauge $U(1)$. Si l'on introduit les champs translatés $\tilde{\phi}_+ = \phi_+$ et $\tilde{\phi}_- = \phi_- - v$, le potentiel en termes de $\tilde{\phi}_\pm$ s'écrit

$$V(\tilde{\phi}_+, \tilde{\phi}_-) = \frac{2m^2}{e^2}\,(e\kappa - m^2) + 2m^2 \tilde{\phi}_+^\dagger \tilde{\phi}_+ + \text{termes en } \tilde{\phi}_+ \text{ et } \tilde{\phi}_- \tag{5.4.6}$$

   La translation des champs scalaires autour de leurs valeurs moyennes dans le vide induit un terme de masse pour le champ vectoriel A_μ :

$$A_\mu A^\mu (\phi_+^\dagger \phi_+ + \phi_-^\dagger \phi_-) = A_\mu A^\mu (\tilde{\phi}_+^\dagger \tilde{\phi}_+ + \tilde{\phi}_-^\dagger \tilde{\phi}_-) + v^2 A_\mu A^\mu + v A_\mu A^\mu (\tilde{\phi}_-^\dagger + \tilde{\phi}_-) \tag{5.4.7}$$

   Le champ de jauge A_μ acquiert une masse $m = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|ev|$ (boson de Goldstone $\tilde{\phi}_g = \tilde{\phi}_- - \tilde{\phi}_-^\dagger$ absorbé par le champ vectoriel pour devenir le degré de liberté longitudinal).

   Les termes de masse des spineurs s'écrivent quant à eux

$$-\, m(\psi_+ \psi_- + \overline{\psi}_+ \overline{\psi}_-) + \frac{1}{\sqrt{2}}\, iev(\overline{\lambda \psi}_- - \lambda \psi_-) = -\sqrt{m^2 + \tfrac{1}{2}\, e^2 v^2}\,(\tilde{\psi}_+ \tilde{\psi}_- + \overline{\tilde{\psi}_+ \tilde{\psi}_-}) \tag{5.4.8}$$

   où l'on a défini les champs spinoriels $\tilde{\psi}_\pm$ et $\tilde{\lambda}$ par

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_- &= \psi_- \\ \tilde{\psi}_+ &= \frac{1}{\sqrt{m^2 + \frac{1}{2}\, e^2 v^2}}\,\big(m\psi_+ + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, iev\lambda\big) \\ \tilde{\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{m^2 + \frac{1}{2}\, e^2 v^2}}\,\big(m\lambda + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, iev\psi_+\big) \end{aligned} \tag{5.4.9}$$

   Le lagrangien décrit maintenant :

   — un champ vectoriel A_μ de masse $m = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|ev|$ (mécanisme de Higgs supersymétrique) ;

   — un champ scalaire réel $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_- + \tilde{\phi}_-^\dagger$ de masse $m = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|ev|$;

   — un champ scalaire complexe $\tilde{\phi}_+$ de masse $2m^2$;

   — trois champs spinoriels $\tilde{\psi}_\pm$ de masse $\sqrt{m^2 + \frac{1}{2}\, e^2 v^2}$ et λ de masse nulle (goldstino).

On notera que dans les deux cas, le spectre de masse exhibe un champ scalaire dont la masse est inférieure à celle du champ spinoriel associé. Ce mécanisme n'est donc pas approprié pour la phénoménologie.

A. Les groupes de Lorentz et de Poincaré

A.1 Le groupe de Lorentz

A.1.1 Généralités

On considère l'espace des coordonnées spatio-temporelles $x^\mu = (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$ muni d'une métrique pseudo-euclidienne $g^{\mu\nu}$ de signature $(+,-,-,-)$, appelé espace de Minkowski [1].

Le groupe de Lorentz est le groupe des transformations linéaires homogènes qui conservent le produit scalaire dans l'espace de Minkowski :

$$g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = g_{\rho\sigma}\Lambda^\rho{}_\mu\Lambda^\sigma{}_\nu\, x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \tag{A.1.1}$$

si $\Lambda^\mu{}_\nu$ désigne la matrice de transformation de Lorentz telle que $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu$. On en déduit

$$g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma}\Lambda^\rho{}_\mu\Lambda^\sigma{}_\nu \qquad \text{ou} \qquad g = \Lambda^t g\Lambda \tag{A.1.2}$$

Le groupe de Lorentz est donc identifié au groupe $O(1,3)$.

La condition (A.1.2) implique $\det\Lambda = \pm 1$. Les matrices de déterminant $+1$ (reps. -1) conservent (reps. changent) l'orientation de l'espace-temps. Les transformations correspondantes sont appelées transformations de Lorentz propres (reps. impropres).

Le choix $\Lambda = g$ correspond à l'inversion spatiale (ou parité) $x^0 \to x^0$ et $x^i \to -x^i$. La composante 00 de la condition (A.1.2) s'écrit $(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_i(\Lambda^i{}_0)^2 = 1$ d'où $|\Lambda^0{}_0| \geq 1$. Les transformations telles que $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ conservent le demi-cône futur. Elles sont appelées transformations de Lorentz orthochrones. Les transformations telles que $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ permutent le demi-cône passé et le demi-cône futur. Elles sont appelées transformations de Lorentz antichrones.

Le choix $\Lambda = -g$ correspond à l'inversion temporelle $x^0 \to -x^0$ et $x^i \to x^i$.

Les quantités $\det\Lambda$ et $\mathrm{sgn}\,(\Lambda^0{}_0)$ permettent de classer les transformations de Lorentz. Le groupe de Lorentz est non-simplement connexe, il possède quatre nappes :

- $L_+^\uparrow$ transformations propres orthochrones : $\det\Lambda = +1$ et $\Lambda^0{}_0 \geq 1$,
- $L_-^\uparrow$ transformations impropres orthochrones : $\det\Lambda = -1$ et $\Lambda^0{}_0 \geq 1$,
- $L_+^\downarrow$ transformations propres antichrones : $\det\Lambda = +1$ et $\Lambda^0{}_0 \leq -1$,
- $L_-^\downarrow$ transformations impropres antichrones : $\det\Lambda = -1$ et $\Lambda^0{}_0 \leq -1$.

Seule la nappe $L_+^\uparrow$ (notée aussi $SO(1,3)^\uparrow$) forme un sous-groupe du groupe de Lorentz ($L_+^\uparrow$ contient l'élément unité). On l'appelle groupe de Lorentz restreint. On construit aussi les sous-groupes suivants : groupe de Lorentz orthochrone $L^\uparrow = L_+^\uparrow \cup L_-^\uparrow$, groupe de Lorentz propre $L_+ = L_+^\downarrow \cup L_+^\uparrow$, groupe de Lorentz orthochore $\widetilde{L} = L_+^\uparrow \cup L_-^\downarrow$. Toute transformation de Lorentz peut s'obtenir à partir des transformations de Lorentz restreintes, de l'inversion spatiale $\mathfrak{i}_s$, de l'inversion temporelle $\mathfrak{i}_t$ et de leurs produits.

1. On utilise les conventions suivantes pour les indices : les indices grecs $\mu, \nu, \ldots$ sont des indices d'espace-temps, les indices latins $i, j, \ldots$ sont des indices d'espace, les indices grecs $\alpha, \beta, \ldots$ sont des indices spinoriels. De plus, on utilise la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés haut et bas.

A.1.2 Générateurs du groupe de Lorentz restreint

Soit une transformation de Lorentz propre orthochrone infinitésimale : $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \varepsilon^\mu{}_\nu$, où $\delta^\mu{}_\nu$ est le symbole de Kronecker. La relation (A.1.2) implique l'antisymétrie du tenseur $\varepsilon_{\mu\nu}$. Dans cette transformation, les coordonnées x^μ se transforment selon $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$ avec

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu{}_\nu \, x^\nu = \tfrac{1}{2}\, \varepsilon_{\rho\sigma}(g^{\rho\mu}\delta^\sigma{}_\nu - g^{\sigma\mu}\delta^\rho{}_\nu)\, x^\nu = -\tfrac{i}{2}\, \varepsilon_{\rho\sigma}(M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu \, x^\nu \tag{A.1.3}$$

où l'on définit les matrices $M^{\rho\sigma}$ par

$$(M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = i(g^{\rho\mu}\delta^\sigma{}_\nu - g^{\sigma\mu}\delta^\rho{}_\nu) \tag{A.1.4}$$

Les matrices $M^{\mu\nu}$ sont les générateurs du groupe de Lorentz restreint, dont les relations de commutation sont calculées à partir de (A.1.4). On obtient l'algèbre de Lorentz, notée $so(1,3)$:

$$\left[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}\right] = i(-g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} + g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma}) \tag{A.1.5}$$

Si l'on définit les générateurs J_i et K_i à partir des générateurs $M^{\mu\nu}$ par

$$J_i = \tfrac{1}{2}\, \varepsilon_{ijk}\, M^{jk} \qquad \text{et} \qquad K_i = M^{0i} \tag{A.1.6}$$

on obtient les relations de commutation suivantes pour J_i et K_i :

$$\left[J_i, J_j\right] = i\, \varepsilon_{ijk}\, J_k \;, \qquad \left[J_i, K_j\right] = i\, \varepsilon_{ijk}\, K_k \;, \qquad \left[K_i, K_j\right] = -i\, \varepsilon_{ijk}\, J_k \tag{A.1.7}$$

où ε_{ijk} désigne le tenseur complètement antisymétrique en i, j, k tel que $\varepsilon_{123} = +1$.
Les générateurs J_i et K_i engendrent les rotations spatiales et les boosts de Lorentz respectivement.

Une troisième expression de l'algèbre de Lorentz est utile pour l'étude des représentations. Pour cela, on définit les générateurs M_i et N_i par

$$M_i = \tfrac{1}{2}\,(J_i + iK_i) \qquad \text{et} \qquad N_i = \tfrac{1}{2}\,(J_i - iK_i) \tag{A.1.8}$$

c'est-à-dire

$$J_i = M_i + N_i \qquad \text{et} \qquad K_i = i(N_i - M_i) \tag{A.1.9}$$

Les relations de commutation de l'algèbre de Lorentz s'écrivent alors

$$\left[M_i, M_j\right] = i\, \varepsilon_{ijk}\, M_k \;, \qquad \left[N_i, N_j\right] = i\, \varepsilon_{ijk}\, N_k \;, \qquad \left[M_i, N_j\right] = 0$$

On sépare ainsi les six générateurs J_i et K_i en deux sous-ensembles commutants de trois générateurs M_i et N_i, qui forment chacun l'algèbre $sl(2)$.

Les invariants de Casimir de l'algèbre de Lorentz (éléments de l'algèbre enveloppante qui commutent avec tous les générateurs de l'algèbre) sont donnés par

$$\begin{aligned} C_1 &= \tfrac{1}{2}\, M^{\mu\nu} M_{\mu\nu} = \vec{J}^{\,2} - \vec{K}^2 \\ C_2 &= \tfrac{1}{4}\, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M^{\mu\nu} M^{\rho\sigma} = 2\vec{J}\cdot\vec{K} \end{aligned} \tag{A.1.10}$$

où $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ désigne le tenseur complètement antisymétrique en $\mu\nu\rho\sigma$, tel que $\varepsilon_{0123} = -\varepsilon^{0123} = +1$ (tenseur de Levi-Cività). Les invariants de Casimir sont donc engendrés par $\vec{M}^2$ et $\vec{N}^2$.

A.1.3 Représentations irréductibles finies du groupe de Lorentz restreint

Les représentations irréductibles de dimension finie du groupe de Lorentz restreint $L_+^\uparrow$ sont caractérisées par les valeurs propres des invariants de Casimir $\vec{M}^2$ et $\vec{N}^2$. Les générateurs M_i et N_i satisfaisant les relations de commutation de l'algèbre $sl(2)$, les valeurs propres de $\vec{M}^2$ et $\vec{N}^2$ sont de la forme $m(m+1)$ et $n(n+1)$ où m et n sont des nombres entiers ou demi-entiers positifs. Les représentations irréductibles de dimension finie de $L_+^\uparrow$ sont donc caractérisées par un couple de deux nombres entiers ou demi-entiers positifs. Les états d'une représentation irréductible sont caractérisés par les valeurs propres des opérateurs $\vec{M}^2$, M_3, $\vec{N}^2$, N_3 et sont notés $|m, m_3, n, n_3\rangle$ où $m_3 = -m, -m+1, \ldots, m-1, m$ et $n_3 = -n, -n+1, \ldots, n-1, n$. La représentation (m, n) est donc de dimension $(2m+1)(2n+1)$.

Les représentations irréductibles de dimension finie du groupe de Lorentz restreint sont des représentations non unitaires. En effet, dans la représentation $|m, m_3, n, n_3\rangle$ les générateurs M_i et N_i sont hermitiens. $J_i = M_i + N_i$ est donc hermitien mais $K_i = i(N_i - M_i)$ est antihermitien.

La relation $J_i = M_i + N_i$ montre que le spin s de la représentation est identifié avec $m+n$. Les représentations de spin entier sont appelées représentations tensorielles. Les représentations de spin demi-entier sont appelées représentations spinorielles. Les deux représentations spinorielles $(0, \frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2}, 0)$ sont dites fondamentales, leur tensorialisation et symétrisation permet d'engendrer toutes les représentations tensorielles et spinorielles du groupe de Lorentz.

A.1.4 Représentations spinorielles du groupe de Lorentz restreint

Il existe une correspondance naturelle entre le groupe de Lorentz et le groupe $SL(2,\mathbb{C})$ des matrices complexes d'ordre deux unimodulaires. Une base de matrices de $SL(2,\mathbb{C})$ est donnée par la matrice unité σ^0 et les trois matrices de Pauli σ^1, σ^2, σ^3 :

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.1.11}$$

qui satisfont les relations suivantes

$$\begin{aligned} \{\sigma^i, \sigma^j\} &\equiv \sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i = 2\delta^{ij} \\ [\sigma^i, \sigma^j] &\equiv \sigma^i\sigma^j - \sigma^j\sigma^i = 2\,i\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma^k \end{aligned} \tag{A.1.12}$$

On pose $\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^i)$ et $\overline{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^i)$, ainsi que $\sigma_\mu = g_{\mu\nu}\sigma^\nu$ et $\overline{\sigma}_\mu = g_{\mu\nu}\overline{\sigma}^\nu$. On a $\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu = 2g^{\mu\nu}$.

On définit une correspondance biunivoque entre un quadrivecteur x^μ et une matrice X hermitienne d'ordre deux par les relations

$$X = x_\mu\sigma^\mu = x^0\sigma^0 - x^i\sigma^i = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + ix^2 \\ -x^1 - ix^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad x^\mu = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}(X\overline{\sigma}^\mu) \tag{A.1.13}$$

Le carré scalaire du quadrivecteur x^μ est donné par le déterminant de la matrice X :

$$\det(X) = g_{\mu\nu}\,x^\mu x^\nu \tag{A.1.14}$$

À une transformation de Lorentz sur les quadrivecteurs $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ doit correspondre une transformation sur les matrices X qui respecte les conditions suivantes : i) linéarité de la transformation ; ii) conservation du produit scalaire (c'est-à-dire du déterminant de X) ; iii) conservation de la réalité des coordonnées x^μ. Une telle transformation est donnée par $X' = SXS^\dagger$ où S est une matrice de $SL(2,\mathbb{C})$. On a alors

$$x'^\mu = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}(X'\overline{\sigma}^\mu) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}(SXS^\dagger\overline{\sigma}^\mu) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}(S\sigma_\nu S^\dagger\overline{\sigma}^\mu)\,x^\nu \tag{A.1.15}$$

On en déduit la relation entre la matrice ${\Lambda^\mu}_\nu$ de la transformation de Lorentz et la matrice S :

$$ {\Lambda^\mu}_\nu = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}(S\sigma_\nu S^\dagger \overline{\sigma}^\mu) \tag{A.1.16} $$

Inversement, à chaque transformation de Lorentz ${\Lambda^\mu}_\nu$ on peut associer deux matrices opposées $\pm S$ données par

$$ S = \pm \frac{1}{\sqrt{\det({\Lambda^\mu}_\nu \sigma_\mu \overline{\sigma}^\nu)}}\, {\Lambda^\mu}_\nu\, \sigma_\mu\, \overline{\sigma}^\nu \tag{A.1.17} $$

En effet, la relation $X' = SXS^\dagger$, vraie pour tout x^μ, implique ${\Lambda^\mu}_\nu \sigma_\mu \overline{\sigma}^\nu = S\sigma_\mu S^\dagger \overline{\sigma}^\mu = 2(\mathrm{tr}\,S^\dagger)S$ en vertu de $\sigma_\mu S^\dagger \overline{\sigma}^\mu = 2\,\mathrm{tr}\,S^\dagger$. On en déduit $\det({\Lambda^\mu}_\nu \sigma_\mu \overline{\sigma}^\nu) = \det(2(\mathrm{tr}\,S^\dagger)S) = (2\,\mathrm{tr}\,S^\dagger)^2$. D'où le résultat. Les matrices ${\Lambda^\mu}_\nu$ obtenues appartiennent au groupe de Lorentz restreint : $\det\Lambda(S) = +1$ et ${\Lambda^0}_0(S) \geq 1$.

Par conséquent, il existe une correspondance linéaire entre les matrices de $SL(2,\mathbb{C})$ et les transformations de Lorentz restreintes, telle que ${\Lambda^\mu}_\nu(S_1){\Lambda^\nu}_\rho(S_2) = {\Lambda^\mu}_\rho(S_1S_2)$ (en particulier, on a ${(\Lambda^{-1})^\mu}_\nu(S) = {\Lambda^\mu}_\nu(S^{-1})$). Les matrices de $SL(2,\mathbb{C})$ forment donc une représentation de dimension deux du groupe de Lorentz restreint. La représentation est à deux valeurs car à chaque matrice S est associée une et une seule transformation de Lorentz ${\Lambda^\mu}_\nu$, mais à chaque transformation de Lorentz ${\Lambda^\mu}_\nu$ sont associées deux matrices opposées $\pm S$. On l'appelle représentation spinorielle fondamentale.

On détermine la représentation (m,n) dont il s'agit en considérant une transformation de Lorentz infinitésimale ${\Lambda^\mu}_\nu = {\delta^\mu}_\nu + {\varepsilon^\mu}_\nu$. Si l'on écrit les générateurs dans la représentation spinorielle fondamentale sous la forme $S = 1 - \frac{i}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu}\,\sigma^{\mu\nu}$, on a au premier ordre en $\varepsilon_{\mu\nu}$:

$$ X' = X + \varepsilon_{\mu\nu}\, x^\nu \sigma^\mu = X + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu}(x^\nu\sigma^\mu - x^\mu\sigma^\nu) = X + \tfrac{i}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu}(X\sigma^{\mu\nu\dagger} - \sigma^{\mu\nu}X) \tag{A.1.18} $$

On en déduit la relation

$$ \sigma^{\mu\nu}\sigma^\rho - \sigma^\rho\sigma^{\mu\nu\dagger} = i(g^{\nu\rho}\sigma^\mu - g^{\mu\rho}\sigma^\nu) \tag{A.1.19} $$

D'où l'expression des générateurs du groupe de Lorentz $\sigma^{\mu\nu}$ dans la représentation spinorielle

$$ \sigma^{\mu\nu} = \tfrac{i}{4}\,(\sigma^\mu\,\overline{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\,\overline{\sigma}^\mu) \tag{A.1.20} $$

c'est-à-dire

$$ J_i = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma^{jk} = \tfrac{1}{2}\,\sigma^i \qquad \text{et} \qquad K_i = \sigma^{0i} = -\tfrac{i}{2}\,\sigma^i \tag{A.1.21} $$

Les générateurs $M_i = \frac{1}{2}\,(J_i + iK_i)$ et $N_i = \frac{1}{2}\,(J_i - iK_i)$ s'écrivent donc

$$ M_i = \tfrac{1}{2}\,\sigma^i \qquad \text{et} \qquad N_i = 0 \tag{A.1.22} $$

Cette représentation est la représentation $(\frac{1}{2},0)$ du groupe de Lorentz.

On définit une autre correspondance biunivoque entre un quadrivecteur x^μ et une matrice $\overline{X}$ hermitienne d'ordre deux par les relations

$$ \overline{X} = x_\mu\overline{\sigma}^\mu = x^0\sigma^0 + x^i\sigma^i = \begin{pmatrix} x^0+x^3 & x^1-ix^2 \\ x^1+ix^2 & x^0-x^3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad x^\mu = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\overline{X}\sigma^\mu) \tag{A.1.23} $$

On a $X\overline{X} = x_\mu x^\mu$ et donc $\overline{X}$ se transforme comme X^{-1} puisqu'une transformation de Lorentz conserve le produit scalaire. La transformation sur la matrice $\overline{X}$ est donc donnée par $\overline{X}' = (S^\dagger)^{-1}\overline{X}S^{-1}$.
La relation entre la matrice ${\Lambda^\mu}_\nu$ de la transformation de Lorentz et la matrice S est maintenant

$$ {\Lambda^\mu}_\nu = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left((S^\dagger)^{-1}\overline{\sigma}_\nu S^{-1}\sigma^\mu\right) \tag{A.1.24} $$

Les matrices ${\Lambda^\mu}_\nu$ obtenues appartiennent au groupe de Lorentz restreint : $\det\Lambda\big((S^\dagger)^{-1}\big) = +1$ et ${\Lambda^0}_0\big((S^\dagger)^{-1}\big) \geq 1$.

On obtient donc une autre représentation de dimension deux du groupe de Lorentz. Cette représentation est aussi une représentation à deux valeurs puisqu'on peut associer à chaque transformation de Lorentz $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ deux matrices opposées $\pm(S^{\dagger})^{-1}$. La représentation fournie par $(S^{\dagger})^{-1}$ n'est pas équivalente à celle fournie par S, car il n'existe pas de matrice unitaire U telle que $USU^{-1} = (S^{\dagger})^{-1}$. On l'appelle représentation spinorielle fondamentale conjuguée.

On détermine la représentation (m, n) dont il s'agit en considérant une transformation de Lorentz infinitésimale $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \varepsilon^{\mu}{}_{\nu}$. Si l'on écrit les générateurs dans la représentation spinorielle fondamentale conjuguée sous la forme $\overline{S} = (S^{\dagger})^{-1} = 1 - \frac{i}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu}\,\overline{\sigma}^{\mu\nu}$, on a

$$\overline{X}' = \overline{X} + \varepsilon_{\mu\nu}\, x^{\nu}\overline{\sigma}^{\mu} = \overline{X} + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu}(x^{\nu}\overline{\sigma}^{\mu} - x^{\mu}\overline{\sigma}^{\nu}) = \overline{X} + \tfrac{i}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu}(\overline{X}\overline{\sigma}^{\mu\nu\dagger} - \overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{X}) \tag{A.1.25}$$

On en déduit la relation

$$\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\sigma}^{\rho} - \overline{\sigma}^{\rho}\overline{\sigma}^{\mu\nu\dagger} = i(g^{\nu\rho}\overline{\sigma}^{\mu} - g^{\mu\rho}\overline{\sigma}^{\nu}) \tag{A.1.26}$$

D'où l'expression des générateurs du groupe de Lorentz $\overline{\sigma}^{\mu\nu}$ dans la représentation spinorielle

$$\overline{\sigma}^{\mu\nu} = \tfrac{i}{4}\,(\overline{\sigma}^{\mu}\,\sigma^{\nu} - \overline{\sigma}^{\nu}\,\sigma^{\mu}) \tag{A.1.27}$$

c'est-à-dire

$$J_i = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,\overline{\sigma}^{jk} = \tfrac{1}{2}\,\sigma^{i} \qquad \text{et} \qquad K_i = \overline{\sigma}^{0i} = \tfrac{i}{2}\,\sigma^{i} \tag{A.1.28}$$

Les générateurs $M_i = \frac{1}{2}\,(J_i + iK_i)$ et $N_i = \frac{1}{2}\,(J_i - iK_i)$ s'écrivent donc

$$M_i = 0 \qquad \text{et} \qquad N_i = \tfrac{1}{2}\,\sigma^{i} \tag{A.1.29}$$

Cette représentation est donc la représentation $(0, \frac{1}{2})$ du groupe de Lorentz.

On notera que $\sigma^{\mu\nu}$ et $\overline{\sigma}^{\mu\nu}$ sont des tenseurs d'ordre deux self-dual et antiself-dual respectivement :

$$\sigma^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2i}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma} \qquad \text{et} \qquad \overline{\sigma}^{\mu\nu} = -\tfrac{1}{2i}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{\sigma}_{\rho\sigma} \tag{A.1.30}$$

A.1.5 Spineurs de Weyl

Soit S une matrice de $SL(2, \mathbb{C})$, de composantes $S_{\alpha}{}^{\beta}$ où $\alpha, \beta = 1, 2$. On appelle spineur de Weyl covariant gauche ψ_{α}, un objet à deux composantes complexes se transformant dans une transformation de Lorentz $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(S)$ comme

$$\psi_{\alpha} \quad \rightarrow \quad \psi'_{\alpha} = S_{\alpha}{}^{\beta}\,\psi_{\beta} \tag{A.1.31}$$

On appelle spineur de Weyl contravariant gauche ψ^{α}, un objet à deux composantes complexes se transformant dans une transformation de Lorentz $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(S)$ comme

$$\psi^{\alpha} \quad \rightarrow \quad \psi'^{\alpha} = \psi^{\beta}\,(S^{-1})_{\beta}{}^{\alpha} \tag{A.1.32}$$

Les composantes des spineurs de Weyl covariants et contravariants sont reliées entre elles par l'intermédiaire des tenseurs antisymétriques

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.1.33}$$

qui satisfont $\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}{}_{\gamma}$. On obtient $\psi^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_{\beta}$ et $\psi_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^{\beta}$, c'est-à-dire $\psi_2 = \psi^1$ et $\psi_1 = -\psi^2$.
Le tenseur $\varepsilon_{\alpha\beta}$ est un invariant de Lorentz : $S_{\alpha}{}^{\gamma}S_{\beta}{}^{\delta}\varepsilon_{\gamma\delta} = (\det S)\,\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}$.
Les spineurs ψ^{α} (ou ψ_{α}) se transforment selon la représentation $(\frac{1}{2}, 0)$ du groupe de Lorentz restreint.

Le produit scalaire invariant de Lorentz de deux spineurs ψ^α et ϕ^α est défini par la contraction des indices contravariants et covariants :

$$\psi\phi = \psi^\alpha\phi_\alpha = \psi^2\phi^1 - \psi^1\phi^2 = -\psi_\alpha\phi^\alpha = \phi^\alpha\psi_\alpha = \phi\psi \tag{A.1.34}$$

On appelle spineur de Weyl covariant droit $\overline{\psi}_{\dot\alpha}$, un objet à deux composantes complexes se transformant dans une transformation de Lorentz $\Lambda^\mu{}_\nu$ comme

$$\overline{\psi}_{\dot\alpha} \quad\rightarrow\quad \overline{\psi}'_{\dot\alpha} = \overline{\psi}_{\dot\beta}\,(S^\dagger)^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha} \tag{A.1.35}$$

On appelle spineur de Weyl contravariant droit $\overline{\psi}^{\dot\alpha}$, un objet à deux composantes complexes se transformant dans une transformation de Lorentz $\Lambda^\mu{}_\nu$ comme

$$\overline{\psi}^{\dot\alpha} \quad\rightarrow\quad \overline{\psi}'^{\dot\alpha} = ((S^\dagger)^{-1})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\,\overline{\psi}^{\dot\beta} \tag{A.1.36}$$

La relation entre les spineurs de Weyl contravariants et covariants pointés est donnée par l'intermédiaire des tenseurs antisymétriques

$$\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.1.37}$$

qui satisfont $\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon_{\dot\beta\dot\gamma} = \delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\gamma}$. On obtient $\overline{\psi}^{\dot\alpha} = \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\psi}_{\dot\beta}$ et $\overline{\psi}_{\dot\alpha} = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\beta}$, c'est-à-dire $\overline{\psi}_{\dot 2} = \overline{\psi}^{\dot 1}$ et $\overline{\psi}_{\dot 1} = -\overline{\psi}^{\dot 2}$. Les spineurs $\overline{\psi}^{\dot\alpha}$ (ou $\overline{\psi}_{\dot\alpha}$) se transforment selon la représentation $(0, \frac{1}{2})$ du groupe de Lorentz restreint. Le produit scalaire invariant de Lorentz de deux spineurs pointés $\overline{\psi}^{\dot\alpha}$ et $\overline{\phi}^{\dot\alpha}$ est défini par la contraction des indices pointés contravariants et covariants :

$$\overline{\psi\phi} = \overline{\psi}_{\dot\alpha}\overline{\phi}^{\dot\alpha} = \overline{\psi}^{\dot 1}\overline{\phi}^{\dot 2} - \overline{\psi}^{\dot 2}\overline{\phi}^{\dot 1} = -\overline{\psi}^{\dot\alpha}\overline{\phi}_{\dot\alpha} = \overline{\phi}_{\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\alpha} = \overline{\phi\psi} \tag{A.1.38}$$

Les spineurs gauches et droits sont reliés par

$$\overline{\psi}_{\dot\alpha} = \big(\psi_\alpha\big)^\dagger \qquad \text{et} \qquad \psi^\alpha = \big(\overline{\psi}^{\dot\alpha}\big)^\dagger \tag{A.1.39}$$

On notera la convention de contraction des indices spinoriels : *lorsqu'ils sont muets, les indices non pointés sont descendants et les indices pointés sont ascendants.*

Vecteurs de Lorentz

On appelle vecteur de Lorentz ψ^μ, un objet à quatre composantes se transformant dans une transformation de Lorentz $\Lambda^\mu{}_\nu$ comme

$$\psi^\mu \quad\rightarrow\quad \psi'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\psi^\nu \tag{A.1.40}$$

Autrement dit, c'est un objet qui a la même loi de transformation que les coordonnées d'espace-temps. Les relations $X' = SXS^\dagger$ et $\overline{X}' = (S^\dagger)^{-1}\overline{X}S^{-1}$ du paragraphe précédent, vraies pour tout x^μ, impliquent les relations $\sigma^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu S\sigma^\nu S^\dagger$ et $\overline{\sigma}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(S^\dagger)^{-1}\overline{\sigma}^\nu S^{-1}$ qui peuvent être interprétées comme les lois de transformation des matrices σ^μ et $\overline{\sigma}^\mu$. On est donc amené à assigner aux matrices σ^μ deux indices spinoriels covariants, l'un non pointé et l'autre pointé : $\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}$ et aux matrices $\overline{\sigma}^\mu$ deux indices spinoriels contravariants, l'un pointé et l'autre non pointé : $\overline{\sigma}^{\mu\,\dot\alpha\alpha}$. Les matrices σ^μ et $\overline{\sigma}^\mu$ se transforment donc selon la représentation $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ du groupe de Lorentz restreint. On notera les relations

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}^{\mu\,\dot\alpha\alpha} &= \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\,\varepsilon^{\alpha\beta}\,\sigma^\mu{}_{\beta\dot\beta} \\ \sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha} &= \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,\varepsilon_{\alpha\beta}\,\overline{\sigma}^{\mu\,\dot\beta\beta} \end{aligned} \tag{A.1.41}$$

ainsi que les formules de réduction

$$\begin{aligned}
\sigma^{\mu}{}_{\alpha\dot{\alpha}}\,\overline{\sigma}_{\mu}{}^{\dot{\beta}\beta} &= 2\delta_{\alpha}^{\beta}\,\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \\
\sigma^{\mu}{}_{\alpha\dot{\alpha}}\,\sigma_{\mu}{}^{\beta\dot{\beta}} &= 2\epsilon_{\alpha\beta}\,\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \\
\overline{\sigma}^{\mu\,\dot{\alpha}\alpha}\,\overline{\sigma}_{\mu}{}^{\dot{\beta}\beta} &= 2\epsilon^{\alpha\beta}\,\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}
\end{aligned} \tag{A.1.42}$$

et

$$\begin{aligned}
\sigma^{\mu}{}_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\sigma}^{\nu\,\dot{\alpha}\beta} + \sigma^{\nu}{}_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\sigma}^{\mu\,\dot{\alpha}\beta} &= \left(\sigma^{\mu}\overline{\sigma}^{\nu} + \sigma^{\nu}\overline{\sigma}^{\mu}\right)_{\alpha}{}^{\beta} = 2g^{\mu\nu}\,\delta_{\alpha}^{\beta} \\
\overline{\sigma}^{\mu\,\dot{\alpha}\alpha}\sigma^{\nu}{}_{\alpha\dot{\beta}} + \overline{\sigma}^{\nu\,\dot{\alpha}\alpha}\sigma^{\mu}{}_{\alpha\dot{\beta}} &= \left(\overline{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} + \overline{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu}\right)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = 2g^{\mu\nu}\,\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}
\end{aligned} \tag{A.1.43}$$

Un vecteur de Lorentz ψ^{μ} étant donné, il y a correspondance biunivoque entre le vecteur ψ^{μ} et un bispineur pointé et non pointé $\psi^{\dot{\alpha}\alpha}$ ou $\psi^{\alpha\dot{\alpha}}$:

$$\psi^{\dot{\alpha}\alpha} = \psi^{\mu}\,\overline{\sigma}_{\mu}{}^{\dot{\alpha}\alpha} \qquad \text{et} \qquad \psi^{\mu} = \tfrac{1}{2}\,\psi^{\dot{\alpha}\alpha}\,\sigma^{\mu}{}_{\alpha\dot{\alpha}} \tag{A.1.44}$$

ou bien

$$\psi^{\alpha\dot{\alpha}} = \psi^{\mu}\,\sigma_{\mu}{}^{\alpha\dot{\alpha}} \qquad \text{et} \qquad \psi^{\mu} = \tfrac{1}{2}\,\psi^{\alpha\dot{\alpha}}\,\overline{\sigma}^{\mu}{}_{\dot{\alpha}\alpha} \tag{A.1.45}$$

Les vecteurs de Lorentz se transforment selon la représentation $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ du groupe de Lorentz restreint.

A.1.6 L'inversion spatiale et les représentations irréductibles finies du groupe de Lorentz orthochrone

L'ensemble des transformations de Lorentz restreintes, l'inversion spatiale $\mathfrak{i}_s$ et leurs produits forme le groupe de Lorentz orthochrone $L^{\uparrow} = L_{+}^{\uparrow} \cup L_{-}^{\uparrow} = L_{+}^{\uparrow} \cup \mathfrak{i}_s L_{+}^{\uparrow}$. La matrice de l'inversion spatiale $\mathfrak{i}_s$ est donnée par la matrice du tenseur métrique $g^{\mu\nu}$. L'action de l'inversion spatiale sur les générateurs du groupe de Lorentz restreint J_i (rotations) et K_i (boosts de Lorentz) est donnée par :

$$\mathfrak{i}_s\,J_i\,\mathfrak{i}_s^{-1} = J_i \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{i}_s\,K_i\,\mathfrak{i}_s^{-1} = -K_i \tag{A.1.46}$$

L'inversion spatiale échange donc les générateurs M_i et N_i : $\mathfrak{i}_s\,M_i\,\mathfrak{i}_s^{-1} = N_i$ et $\mathfrak{i}_s\,N_i\,\mathfrak{i}_s^{-1} = M_i$. Les invariants de Casimir sont également échangés : $\mathfrak{i}_s\,\vec{M}^2\,\mathfrak{i}_s^{-1} = \vec{N}^2$ et $\mathfrak{i}_s\,\vec{N}^2\,\mathfrak{i}_s^{-1} = \vec{M}^2$, et ne sont plus des invariants du groupe de Lorentz orthochrone. Ces relations montrent que les vecteurs de la représentation (m, n) du groupe de Lorentz restreint sont transformés en les vecteurs de la représentation (n, m) par l'inversion spatiale.

Si $m = n$, on a $\mathfrak{i}_s|m, m_3, n, n_3\rangle = \eta|m, m_3, n, n_3\rangle$, la phase η étant choisie telle que $\eta = \pm 1$. Les vecteurs de la représentation (m, n) coïncident avec ceux de la représentation (n, m). Les représentations irréductibles (m, m) du groupe de Lorentz restreint sont donc des représentations du groupe de Lorentz orthochrone.

Si $m \neq n$, on définit $\mathfrak{i}_s|m, m_3, n, n_3\rangle_{(m,n)} = |n, n_3, m, m_3\rangle_{(n,m)}$, ce qui fixe la phase relative entre les bases $|m, m_3, n, n_3\rangle$ et $|n, n_3, m, m_3\rangle$ des représentations (m, n) et (n, m). Les vecteurs de la représentation (m, n) diffèrent de ceux de la représentation (n, m). Dans ce cas, les représentations irréductibles du groupe de Lorentz orthochrone sont obtenues comme la somme directe d'une représentation irréductible (m, n) du groupe de Lorentz restreint et de sa représentation irréductible conjuguée (n, m).

Par conséquent, les représentations irréductibles finies du groupe de Lorentz orthochrone se classent en deux catégories :

— les représentations irréductibles auto-conjuguées, notées (m, η), caractérisées par un nombre entier ou demi-entier m et par la valeur propre $\eta = \pm 1$ de l'inversion spatiale (appelée parité de la représentation) sur les vecteurs de base. Ces représentations sont de dimension $(2m+1)^2$. La représentation (m, η) se réduit sous le groupe de Lorentz restreint comme la représentation irréductible (m, m).

— les représentations générales, notées (m, n), caractérisées par deux nombres entiers ou demi-entiers m et n. Ces représentations sont de dimension $2(2m+1)(2n+1)$. La représentation (m, n) se réduit sous le groupe de Lorentz restreint comme la représentation réductible $(m, n) \oplus (n, m)$.

A.1.7 Exemples de représentations irréductibles finies du groupe de Lorentz orthochrone

Scalaires. Un scalaire de Lorentz se transforme selon la représentation irréductible (0,0) du groupe de Lorentz restreint. Sous le groupe de Lorentz orthochrone, on distingue les scalaires "vrais", qui se transforment selon la représentation $(0, \eta = +1)$, et les pseudo-scalaires, qui se transforment selon la représentation $(0, \eta = -1)$.

Vecteurs. Un vecteur de Lorentz se transforme selon la représentation irréductible $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ du groupe de Lorentz restreint. Sous le groupe de Lorentz orthochrone, on distingue les vecteurs polaires, qui se transforment selon la représentation $(\frac{1}{2}, \eta = +1)$, et les vecteurs axiaux, qui se transforment selon la représentation $(\frac{1}{2}, \eta = -1)$.

Spineurs de Dirac. L'exemple le plus important de représentation irréductible non auto-conjuguée du groupe de Lorentz orthochrone correspond à la représentation réductible $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ du groupe de Lorentz restreint. Un spineur de Weyl gauche (resp. droit) se transforme sous le groupe de Lorentz restreint selon la représentation $(\frac{1}{2}, 0)$ (resp. $(0, \frac{1}{2})$). Or l'inversion spatiale échange les représentations $(\frac{1}{2}, 0)$ et $(0, \frac{1}{2})$. L'opération parité est donc bien définie sur la représentation réductible $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$. Les objets qui se transforment comme la représentation $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ sous le groupe de Lorentz restreint sont appelés spineurs de Dirac. Un spineur de Dirac Ψ_D a la structure suivante (en représentation dite de Weyl ou représentation chirale) :

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \overline{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{A.1.47}$$

où ψ_α est un spineur de Weyl gauche et $\overline{\chi}^{\dot{\alpha}}$ un spineur de Weyl droit.
Dans une transformation de Lorentz $\Lambda^\mu{}_\nu$, le spineur ψ_α se transforme par la matrice $S(\Lambda^\mu{}_\nu)$ et le spineur $\overline{\chi}^{\dot{\alpha}}$ par la matrice $(S(\Lambda^\mu{}_\nu)^\dagger)^{-1}$. Le spineur de Dirac Ψ_D se transforme donc dans une transformation de Lorentz $\Lambda^\mu{}_\nu$ par la matrice

$$L(\Lambda) = \begin{pmatrix} S(\Lambda^\mu{}_\nu) & 0 \\ 0 & (S(\Lambda^\mu{}_\nu)^\dagger)^{-1} \end{pmatrix} \tag{A.1.48}$$

c'est-à-dire

$$\Psi_D \;\to\; \Psi'_D = L(\Lambda)\Psi_D = \begin{pmatrix} S(\Lambda^\mu{}_\nu) & 0 \\ 0 & (S(\Lambda^\mu{}_\nu)^\dagger)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \overline{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(\Lambda^\mu{}_\nu)\, \psi_\alpha \\ (S(\Lambda^\mu{}_\nu)^\dagger)^{-1} \overline{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{A.1.49}$$

Dans une transformation de Lorentz infinitésimale $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \varepsilon^\mu{}_\nu$, on a

$$L(\Lambda) = I - \tfrac{i}{4}\, \varepsilon_{\mu\nu}\, \Sigma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{i}{2}\, \varepsilon_{\mu\nu}\, \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{i}{2}\, \varepsilon_{\mu\nu}\, \overline{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix} \tag{A.1.50}$$

Les générateurs du groupe de Lorentz dans la représentation $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$ sont donc les matrices

$$\Sigma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2}\,(\sigma^{\mu}\,\overline{\sigma}^{\nu} - \sigma^{\nu}\,\overline{\sigma}^{\mu}) & 0 \\ 0 & \frac{i}{2}\,(\overline{\sigma}^{\mu}\,\sigma^{\nu} - \overline{\sigma}^{\nu}\,\sigma^{\mu}) \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\,[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}] \tag{A.1.51}$$

en introduisant les matrices γ^{μ} de Dirac (en représentation de Weyl)

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \\ \overline{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix} \tag{A.1.52}$$

qui satisfont l'algèbre de Clifford en dimension 4

$$\left\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right\} = 2g^{\mu\nu} \tag{A.1.53}$$

Sous l'inversion spatiale $\mathbf{i}_s$, Ψ_D se transforme comme

$$\Psi_D \to \Psi'_D = \gamma^0\Psi_D = \begin{pmatrix} \sigma^0\overline{\chi}^{\dot{\alpha}} \\ \overline{\sigma}^0\psi_{\alpha} \end{pmatrix} \tag{A.1.54}$$

On introduit également la matrice $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ telle que $\left\{\gamma_5,\gamma^{\mu}\right\} = 0$, $\gamma_5^2 = \mathbf{1}$ and $\gamma_5^{\dagger} = \gamma_5$. Les états de chiralité donnée d'un spineur de Dirac sont alors obtenus par

$$\Psi_L = \frac{\mathbf{1}-\gamma_5}{2}\,\Psi_D = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Psi_R = \frac{\mathbf{1}+\gamma_5}{2}\,\Psi_D = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{A.1.55}$$

Le spineur adjoint $\overline{\Psi}$ et les spineurs conjugués de charge Ψ^c and $\overline{\Psi}^c$ d'un spineur de Dirac $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha} \\ \overline{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$ sont définis par $\overline{\Psi} = \left(\chi^{\alpha}\,,\,\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\right)$, $\Psi^c = \begin{pmatrix} \chi_{\alpha} \\ \overline{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$ et $\overline{\Psi}^c = \left(\psi^{\alpha}\,,\,\overline{\chi}_{\dot{\alpha}}\right)$.

Les spineurs Ψ et Ψ^c sont reliés par la matrice de conjugaison de charge C par $\Psi^c = C\overline{\Psi}^t$. Les six matrices C, $\gamma^{\mu}\gamma_5 C$, $\gamma_5 C$ sont antisymétriques et les dix matrices $\gamma^{\mu}C$, $\sigma^{\mu\nu}C$ sont symétriques. Elles forment un ensemble de 16 matrices linéairement indépendantes.

La matrice de conjugaison de charge C satisfait les relations suivantes :

$$\begin{aligned} &C^2 = -\mathbb{I}\,, && CC^{\dagger} = C^{\dagger}C = \mathbb{I}\,, \\ &C\gamma^{\mu}C^{-1} = -(\gamma^{\mu})^t\,, && C\gamma_5C^{-1} = (\gamma_5)^t\,, \quad C\gamma_5\gamma^{\mu}C^{-1} = (\gamma_5\gamma^{\mu})^t \end{aligned}$$

Un spineur de Majorana est un spineur de Dirac satisfaisant la condition $\Psi = \Psi^c$. Les deux composantes de Weyl sont alors reliées : un spineur de Majorana Ψ_M a la forme $\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha} \\ \overline{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$.

A.2 Le groupe de Poincaré

A.2.1 Généralités

On appelle groupe de Poincaré (ou groupe de Lorentz inhomogène), le groupe P de toutes les transformations linéaires qui conservent le produit scalaire. Autrement dit, c'est le groupe des transformations produit d'une transformation de Lorentz et d'une translation d'espace-temps : $x_{\mu} \to x'_{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x_{\nu} + a_{\mu}$, noté $x' = (a,\Lambda)x$. La loi de composition des transformations de Poincaré est donnée par

$$(a,\Lambda).(a',\Lambda') = (a+\Lambda a',\Lambda\Lambda') \tag{A.2.1}$$

et l'inverse d'une transformation de Poincaré par

$$(a, \Lambda)^{-1} = (-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}) \tag{A.2.2}$$

Le groupe de Poincaré est donc identifié au groupe $IO(1,3)$.
Le groupe de Poincaré contient une infinité de sous-groupes isomorphes au groupe de Lorentz, chacun d'eux étant associé à un point de l'espace-temps. Il s'en suit qu'on peut considérer le groupe de Lorentz sous deux aspects :
– le groupe de Lorentz est un sous-groupe L_O des transformations du groupe de Poincaré qui laissent le point O invariant.
– le groupe de Lorentz est la classe d'équivalence L de tous les sous-groupes du groupe de Poincaré isomorphes à L_O, c'est-à-dire le groupe quotient $P/T(4)$ où $T(4)$ est le groupe des translations d'espace-temps.
Le groupe de Poincaré apparaît donc comme le produit semi-direct du groupe des translations d'espace-temps et du groupe de Lorentz : $IO(1,3) = T(4) \rtimes O(1,3)$.

Comme le groupe de Lorentz, le groupe de Poincaré comprend 4 nappes notées $P_+^\uparrow$, $P_-^\uparrow$, $P_+^\downarrow$ et $P_-^\downarrow$. Seule la composante connexe à l'unité $P_+^\uparrow$ (notée aussi $ISO(1,3)^\uparrow$) forme un groupe (groupe de Poincaré restreint). On définit aussi les sous-groupes suivants du groupe de Poincaré, $P^\uparrow = P_+^\uparrow \cup P_-^\uparrow$ (groupe de Poincaré orthochrone), $P_+ = P_+^\uparrow \cup P_+^\downarrow$ (groupe de Poincaré propre) et $\widetilde{P} = P_+^\uparrow \cup P_-^\downarrow$ (groupe de Poincaré orthochore).

A.2.2 Générateurs du groupe de Poincaré restreint

Soit une transformation de Poincaré propre orthochrone infinitésimale, $x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ où $\varepsilon^\mu{}_\nu$ et a^μ sont des paramètres infinitésimaux et $\varepsilon_{\mu\nu}$ est antisymétrique. On a

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu = -\tfrac{i}{2}\left(\varepsilon_{\rho\sigma}(M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu + a_\sigma (P^\rho)^\mu{}_\nu\right) x^\nu \tag{A.2.3}$$

Puisque l'on a $(0,\Lambda)^{-1}.(a',\Lambda').(0,\Lambda) = (\Lambda^{-1}a', \Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda)$, on en déduit pour les générateurs

$$\begin{aligned}(0,\Lambda)^{-1}M^{\mu\nu}(0,\Lambda) &= \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma M^{\rho\sigma}\\ (0,\Lambda)^{-1}P^{\mu}(0,\Lambda) &= \Lambda^\mu{}_\rho P^\rho\end{aligned} \tag{A.2.4}$$

En considérant une transformation de Lorentz Λ infinitésimale, on obtient

$$\begin{aligned}(1+\tfrac{i}{2}\,\varepsilon_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma})M^{\mu\nu}(1-\tfrac{i}{2}\,\varepsilon_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}) &= M^{\mu\nu} + \tfrac{i}{2}\,\varepsilon_{\rho\sigma}[M^{\rho\sigma}, M^{\mu\nu}] = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma M^{\rho\sigma}\\ (1+\tfrac{i}{2}\,\varepsilon_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma})P^{\mu}(1-\tfrac{i}{2}\,\varepsilon_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}) &= P^{\mu} + \tfrac{i}{2}\,\varepsilon_{\rho\sigma}[M^{\rho\sigma}, P^{\mu}] = \Lambda^\mu{}_\rho P^\rho\end{aligned} \tag{A.2.5}$$

D'où les relations de commutation de l'algèbre de Poincaré $iso(1,3) = t_4 \ni so(1,3)$:

$$\begin{aligned}\left[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}\right] &= i(-g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} + g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma})\\ \left[M^{\mu\nu}, P^{\rho}\right] &= i(g^{\nu\rho}P^\mu - g^{\mu\rho}P^\nu)\\ \left[P^\mu, P^\nu\right] &= 0\end{aligned} \tag{A.2.6}$$

On introduit l'opérateur de Pauli-Lubanski W_μ défini par

$$W_\mu = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma} \tag{A.2.7}$$

c'est-à-dire $W_\mu = [C, P_\mu]$ où $C = \frac{1}{8}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}M^{\mu\nu}M^{\rho\sigma}$.
$W^\rho = g^{\rho\sigma}W_\sigma$ possède les relations de commutation suivantes avec $M^{\mu\nu}$, P^μ et W^μ :

$$\begin{aligned}\left[W^\mu, P^\nu\right] &= 0\\ \left[W^\mu, W^\nu\right] &= i\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,P_\rho W_\sigma\\ \left[M^{\mu\nu}, W^\rho\right] &= i(g^{\nu\rho}W^\mu - g^{\mu\rho}W^\nu)\end{aligned} \tag{A.2.8}$$

La dernière relation implique que W^μ est un vecteur de Lorentz. L'opérateur de Pauli-Lubanski W^μ est orthogonal à P_μ :

$$W^\mu P_\mu = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad W^0 = \frac{\vec{W}\cdot\vec{P}}{P^0} \tag{A.2.9}$$

Les deux invariants de Casimir de l'algèbre de Poincaré sont donnés par

$$\begin{aligned} C_m &= P_\mu P^\mu = P^2 \\ C_s &= W_\mu W^\mu = M^{\mu\sigma} M_{\nu\sigma} P_\mu P^\nu - \tfrac{1}{2}\, M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} P_\sigma P^\sigma = W^2 \end{aligned} \tag{A.2.10}$$

A.2.3 Représentations irréductibles unitaires du groupe de Poincaré restreint

D'après le lemme de Schur, qui s'étend aux cas des groupes non compacts pour des représentations unitaires irréductibles, les opérateurs de Casimir C_m et C_s sont proportionnels à l'identité dans toute représentation unitaire irréductible. Les représentations irréductibles du groupe de Poincaré restreint sont donc caractérisées par les valeurs propres de ces deux invariants de Casimir. Les représentations irréductibles unitaires sont classées en trois catégories.

Représentations de genre temps. L'invariant P^2 a une valeur propre positive m^2. Soit W^μ l'opérateur de Pauli-Lubanski dans un référentiel $\mathcal{R}$ et W'^μ dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}_0$ où $\vec{P} = \vec{0}$. Le passage du référentiel $\mathcal{R}$ au référentiel $\mathcal{R}_0$ s'effectue par une transformation de Lorentz spéciale de paramètre $\vec{P}/P^0$. Les composantes de W'^μ sont obtenues par les formules de changement de référentiel :

$$\begin{aligned} W'^0 &= \frac{P^0}{m}\left(W^0 - \frac{\vec{W}\cdot\vec{P}}{P^0}\right) = 0 \\ \vec{W}' &= \vec{W} - \vec{P}\,\frac{\vec{W}\cdot\vec{P}}{P^0(P^0+m)} = \vec{W} - \vec{P}\,\frac{W^0}{P^0+m} \end{aligned} \tag{A.2.11}$$

Si on pose

$$m\vec{S} = \vec{W} - \vec{P}\,\frac{W^0}{P^0+m} \tag{A.2.12}$$

on obtient à partir des relations de commutation de W^μ, les relations de commutation de $\vec{S}$:

$$\left[S^i, S^j\right] = i\,\varepsilon_{ijk}\, S^k \tag{A.2.13}$$

avec $i, j, k = 1, 2, 3$ et ε_{ijk} est le tenseur complètement antisymétrique. $\vec{S}$ représente donc l'opérateur de spin du système. On a alors $W^2 = (W^0)^2 - \vec{W}^2 = -m^2\vec{S}^2$. La valeur propre de l'invariant W^2 est donc égale à $-m^2 s(s+1)$ où s est un nombre entier ou un demi-entier positif.
La représentation est caractérisée par la paire de nombres (m, s). Les états de la représentation sont caractérisés par les valeurs propres des opérateurs P^2, P^μ, W^2 et W_3 et sont notés $|m, \vec{p}, s, s_3\rangle$ où $\vec{p}$ prend toutes les valeurs possibles et $s_3 = -s, -s+1, \ldots, s-1, s$. L'action des opérateurs P^2, P^μ, W^2 et W_3 sur les vecteurs de base de la représentation est la suivante :

$$\begin{aligned} P^2|m, \vec{p}, s, s_3\rangle &= m^2|m, \vec{p}, s, s_3\rangle \\ P^\mu|m, \vec{p}, s, s_3\rangle &= p^\mu|m, \vec{p}, s, s_3\rangle \\ W^2|m, \vec{p}, s, s_3\rangle &= -m^2 s(s+1)|m, \vec{p}, s, s_3\rangle \\ W_3|m, \vec{p}, s, s_3\rangle &= m s_3|m, \vec{p}, s, s_3\rangle \end{aligned} \tag{A.2.14}$$

Physiquement, les états de la représentation de genre temps correspondent à une particule de masse m, d'impulsion $\vec{p}$ et de spin s, ayant $2s+1$ états de polarisation.

Représentations de genre lumière. Les invariants P^2 et W^2 ont une valeur propre nulle $m = 0$. Comme $W_\mu P^\mu = 0$, P_μ et W_μ sont proportionnels, $W_\mu = \lambda P_\mu$. La constante de proportionnalité λ s'appelle l'hélicité et prend les valeurs $\pm s$ où s est un nombre entier ou demi-entier positif. Les états de la représentation sont caractérisés par les valeurs propres des opérateurs P^2, P^μ, W^2 et W_3 et sont notés $|m = 0, \vec{p}, \lambda\rangle$ avec $\vec{p} = p^0\hat{p}$ où p_0 prend toutes les valeurs possibles et $\hat{p}$ est un vecteur unitaire. L'action des opérateurs P^2, P^μ, W^2 et W_3 sur les vecteurs de base de la représentation est la suivante, avec $p^\mu = (p^0, p^0\hat{p})$:

$$\begin{aligned}
&P^2\,|m = 0, \vec{p}, \lambda\rangle = 0\\
&P^\mu\,|m = 0, \vec{p}, \lambda\rangle = p^\mu|m = 0, \vec{p}, \lambda\rangle\\
&W^2\,|m = 0, \vec{p}, \lambda\rangle = 0\\
&W_3\,|m = 0, \vec{p}, \lambda\rangle = p_0\lambda|m = 0, \vec{p}, \lambda\rangle
\end{aligned} \tag{A.2.15}$$

Si l'on choisit $\hat{p} = (0, 0, 1)$, on a $P_1|m = 0, \vec{p}, \lambda\rangle = P_2|m = 0, \vec{p}, \lambda\rangle = 0$ et donc $W_1|m = 0, \vec{p}, \lambda\rangle = W_2|m = 0, \vec{p}, \lambda\rangle = 0$, puisque P^μ et W^μ sont proportionnels. On obtient alors

$$\frac{1}{\vec{p}^{\,2}}\,\vec{W}\cdot\vec{P}\,|m = 0, \vec{p}, \lambda\rangle = \lambda|m = 0, \vec{p}, \lambda\rangle \tag{A.2.16}$$

L'opérateur $\frac{1}{\vec{p}^{\,2}}\,\vec{W}\cdot\vec{P}$ s'appelle opérateur d'hélicité. Il correspond à la projection du spin le long de la direction de l'impulsion. L'hélicité λ est invariante dans une transformation de Lorentz [2].
Physiquement, les états de la représentation de genre lumière correspondent à une particule de masse nulle, d'impulsion $\vec{p} = p_0\hat{p}$ et d'hélicité λ, ayant deux états de polarisation $\pm s$.

Représentations de genre espace. L'invariant P^2 a une valeur propre négative $-m^2$. Dans ces conditions, l'opérateur W^2 a une valeur propre w ou bien positive continue, ou bien négative égale à $-s(s{+}1)$, où s est un nombre entier ou demi-entier positif. Les états de la représentation sont caractérisés par les valeurs propres des opérateurs P^2, P^μ, W^2 et W_3 et sont notés $|m, \vec{p}, w, \lambda\rangle$ où $(p^0, \vec{p})$ est obtenu par une rotation du vecteur $(m, \vec{0})$. Les valeurs de λ sont $\lambda = \pm 0, \pm 1, \ldots$ dans le cas où W^2 a une valeur propre positive continue et $\lambda = \pm(s+1), \pm(s+2), \ldots$ dans le cas où W^2 a une valeur propre négative discrète. L'action des opérateurs P^2, P^μ, W^2 et W_3 sur les vecteurs de base de la représentation est la suivante :

$$\begin{aligned}
&P^2|m, \vec{p}, w, \lambda\rangle = -m^2|m, \vec{p}, w, \lambda\rangle\\
&P^\mu|m, \vec{p}, w, \lambda\rangle = p^\mu|m, \vec{p}, w, \lambda\rangle\\
&W^2|m, \vec{p}, w, \lambda\rangle = w|m, \vec{p}, w, \lambda\rangle\\
&W_3|m, \vec{p}, w, \lambda\rangle = m\lambda|m, \vec{p}, w, \lambda\rangle
\end{aligned} \tag{A.2.17}$$

Les états de la représentation de genre espace ne sont pas réalisés dans la nature.

Les représentations irréductibles unitaires du groupe de Poincaré restreint sont de dimension infinie (les états des représentations irréductibles unitaires dépendent du quadrivecteur p^μ dont les composantes varient de façon continue).

2. Il est également possible de définir une hélicité dans le cas des représentations de genre temps, comme étant la valeur propre de l'opérateur $\frac{1}{\vec{p}^{\,2}}\,\vec{W}\cdot\vec{P}$ sur les états de la représentation. Cependant, dans ce cas, l'hélicité n'est pas invariante dans une transformation de Lorentz mais est transformée en l'une des $2s + 1$ valeurs possibles de la polarisation.

A.2.4 L'inversion spatiale et les représentations irréductibles unitaires du groupe de Poincaré orthochrone

L'ensemble des transformations de Poincaré restreintes, l'inversion spatiale $\mathfrak{i}_s$ et leurs produits forme le groupe de Poincaré orthochrone $P^{\uparrow} = P_+^{\uparrow} \cup P_-^{\uparrow} = P_+^{\uparrow} \cup \mathfrak{i}_s P_+^{\uparrow}$. L'action de l'inversion spatiale sur les générateurs des translations est la suivante :

$$\mathfrak{i}_s\, P_i\, \mathfrak{i}_s^{-1} = -P_i \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{i}_s\, P_0\, \mathfrak{i}_s^{-1} = P_0 \tag{A.2.18}$$

Le vecteur P_μ est un vecteur polaire sous l'action de l'inversion spatiale.

Représentations de genre temps. Les représentations irréductibles unitaires de genre temps sont caractérisées par les deux valeurs propres des invariants de Casimir du groupe de Poincaré, la masse m et le spin intrinsèque s, et par la valeur de la parité intrinsèque η_p.
Les états de la représentation étant notés $|m, \vec{p}, s, s_3\rangle$, l'action de l'inversion spatiale $\mathfrak{i}_s$ sur les vecteurs de base de la représentation est la suivante :

$$\mathfrak{i}_s |m, \vec{p}, s, s_3\rangle = \eta_p\, e^{\pm i\pi s} |m, -\vec{p}, s, -s_3\rangle \tag{A.2.19}$$

Représentations de genre lumière. Les représentations irréductibles unitaires de genre lumière sont caractérisées par la valeur de l'hélicité λ (supposée ici non nulle). Les états de la représentation étant notés $|m = 0, \vec{p}, \lambda\rangle$, l'action de l'inversion spatiale $\mathfrak{i}_s$ sur les vecteurs de base de la représentation est la suivante :

$$\mathfrak{i}_s |m = 0, \vec{p}, \lambda\rangle = \eta_p\, e^{\pm i\pi|\lambda|} |m = 0, -\vec{p}, -\lambda\rangle \tag{A.2.20}$$

[L'introduction du facteur de phase η_p n'est pas obligatoire dans le cas des représentations du genre lumière. Cependant, il permet une notation uniforme avec le cas des représentations du genre temps. Dans le cas des représentations du genre lumière, le facteur de phase η_p est choisi par convention. Pour le photon par exemple où $\lambda = 1$, on doit prendre $\eta_p = -1$.]

B. L'algèbre superconforme

Dans le cas où tous les champs composants d'une théorie sont de masse nulle, la théorie est invariante d'échelle (tous les opérateurs de la densité lagrangienne ont une dimension de masse égale à 4). L'algèbre de symétrie de la théorie devient l'algèbre conforme, isomorphe à $so(2,4)$ dans l'espace-temps quadridimensionnel et engendrée par les 15 générateurs P_μ (translations), $M_{\mu\nu}$ (transformations de Lorentz), K_μ (transformations conformes) et D (dilatations), dont les relations de commutation s'écrivent

$$\begin{aligned}
&\left[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}\right] = i(-g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma}) && \\
&\left[M_{\mu\nu}, P_\rho\right] = i(g_{\nu\rho}P_\mu - g_{\mu\rho}P_\nu) && \left[P_\mu, P_\nu\right] = 0 \\
&\left[M_{\mu\nu}, K_\rho\right] = i(g_{\nu\rho}K_\mu - g_{\mu\rho}K_\nu) && \left[K_\mu, K_\nu\right] = 0 \\
&\left[P_\mu, K_\nu\right] = 2i(g_{\mu\nu}D - M_{\mu\nu}) && \left[D, M_{\mu\nu}\right] = 0 \\
&\left[D, P_\mu\right] = -iP_\mu && \left[D, K_\mu\right] = iK_\mu
\end{aligned} \tag{B.0.1}$$

En fait, la présence de la supersymétrie permet d'élargir encore l'algèbre de symétrie par l'introduction des transformations superconformes S_α qui apparaissent dans le commutateur entre un générateur de supersymétrie Q_α et un générateur des transformations conformes K_μ. Les relations de commutation de l'algèbre obtenue, appelée *algèbre superconforme*, sont données par (outre les relations (B.0.1) et (1.2.24)) :

$$\begin{aligned}
&\left[S^I_\alpha, M_{\mu\nu}\right] = (\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta S^I_\beta && \left[\overline{S}^I_{\dot\alpha}, M_{\mu\nu}\right] = -\overline{S}^I_{\dot\beta}(\overline{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha} \\
&\left[K_\mu, Q^I_\alpha\right] = 2ig_{\mu\nu}\sigma^\nu_{\alpha\dot\beta}\,\overline{S}^{\dot\beta\,I} && \left[P_\mu, S^I_\alpha\right] = g_{\mu\nu}\sigma^\nu_{\alpha\dot\beta}\,\overline{Q}^{\dot\beta\,I} \\
&\left[D, Q^I_\alpha\right] = -\tfrac{1}{2}iQ^I_\alpha && \left[D, S^I_\alpha\right] = \tfrac{1}{2}iS^I_\alpha \\
&\left\{Q^I_\alpha, S^J_\beta\right\} = \varepsilon_{\alpha\beta}(D\,\delta^{IJ} + T^{IJ}) + \tfrac{1}{2}\,\sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\,M_{\mu\nu}\,\delta^{IJ} && \left\{S^I_\alpha, \overline{S}^J_{\dot\alpha}\right\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\,K_\mu\,\delta^{IJ}
\end{aligned} \tag{B.0.2}$$

L'algèbre superconforme est isomorphe à la superalgèbre de Lie simple $su(2,2|N)$, forme réelle de $sl(4|N)$.

C. Références bibliographiques

Les articles et références concernant la supersymétrie sont innombrables.
Ci-dessous, un choix (nécessairement partial) d'articles historiques, de cours en ligne et d'ouvrages.

Articles et références historiques

[1] S. Coleman, J. Mandula, *All possible symmetries of the S-matrix,* Phys. Rev. **159** (1967) 1251-1256.

[2] Yu.A. Golfand, E.P. Likhtman, *Extension of the algebra of Poincaré group generators and violation of P invariance,* JETP Lett. **13** (1971) 323-326.

[3] R. Haag, M. Sohnius, J.T. Łopuszański, *All possible generators of supersymmetries of the S-matrix,* Nucl. Phys. **B88** (1975) 257-274.

[4] A. Salam, J. Strathdee, *Super-gauge transformations,* Nucl. Phys. **B76** (1974) 477-482.

[5] M. Sohnius, *Introducing supersymmetry,* Phys. Rep. **128** (1985) 39-204.

Cours en ligne

[6] M. Bertolini, *Lectures on Supersymmetry,* SISSA, 2015.

[7] A. Bilal, *Introduction to supersymmetry,* Univ. Neuchâtel, 2001, `arXiv:hep-th/0101055`.

[8] R. Boels, F. Brümmer, *Introduction to supersymmetry and supergravity,* Univ. Hamburg, 2013.

[9] J.D. Lykken, *Introduction to supersymmetry,* Fermi National Accelerator Laboratory, 1996, `arXiv:hep-th/9612114`.

[10] S.P. Martin, *A Supersymmetry Primer,* Northern Illinois University & Fermi National Accelerator Laboratory, 1997, `arXiv:hep-th/9709356`.

[11] I. Sachs, *Lectures on Supersymmetry,* DIAS-STP/97-27.

Ouvrages

[12] P. Binétruy, *Supersymmetry. Theory, Experiment and Cosmology.* Oxford University Press, 2006.

[13] B. Fuks, M. Rausch de Traubenberg, *Supersymétrie, exercices avec solutions.* Ellipses, 2011.

[14] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, vol. III.* Cambridge University Press, 2000.

[15] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and supergravity.* Princeton University Press, 1992.

[16] P. West, *Introduction to supersymmetry and supergravity.* World Scientific, 1990.